1 P Wellengleichung hat 2te Zeitableitung, die Schrödinger-Gl. nur die 1. Zeitableitung

---

(1 dim. Wellengleichung)

Ansatz:

$$\underset{\in \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{E(x,t)}} = \underset{\in \mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{E(x)}}\, e^{-i\omega t} + \text{komplex konj. (k.c.)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^2} E(x) + \underbrace{\frac{\omega^2 n^2(x)}{c_0^2}}_{A(x)} E(x) = 0$$

Stationäre 1 dim Schröd.-Gl.

$$\hat{H}\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \left(\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\right)\psi(x) = 0$$

analog zu E-Dynamik

Identische Mathematische Formel

Beides sind Wellen

$\Rightarrow$ eigentlich könnten wir hier aufhören ...

Bemerkung:

$|E(x)|^2 \sim$ el.-mag. Energiedichte

$\sim$ Photonendichte

analog zu

$|\psi(x)|^2 \sim$ Teilchendichte

2.2.2) Ebene Wellen und die de Broglie-Wellenlänge

Bsp: Konstante pot. Energie $V(x)$

$\Rightarrow \quad V(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) = 0$$

lineare DGL $\Rightarrow$ Superpositionsprinzip

Ansatz $\quad \psi(x) = e^{ikx}$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E = E_{kin}$$

$\Rightarrow$ Impuls $\quad p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{p}$$ analog Photonen $\lambda = \frac{h}{p}$

Zahlenbsp (Wellenlängen)

de Broglie Wellenlänge eines Menschen:

$v = 1 \frac{m}{s}$, $m = 70\,kg$

$\Rightarrow \quad p = 70 \frac{kg\,m}{s}$

$\lambda \approx 10^{-35}\,m \Rightarrow$ keine Beugung

de Broglie Wellenlänge eines Elektrons:

$v = 1 \frac{m}{s}$, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-34}$

$\Rightarrow \quad \lambda \approx 1\,mm \Rightarrow$ Beugung

Wellencharakter makroskopisch (oft) irrelevant

ABER: im mikroskop. Bereich ist der Wellencharakter meist <u>nicht vernachlässigbar.</u>

Zeitabhängige Wellenfkt.:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$\Rightarrow |\Psi(x,t)|^2 = 1 = \text{const}$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\omega}{k}$$

$$c = \frac{E\,h}{\hbar\, 2\pi\, p}$$

$$\hbar \overset{?}{=} \frac{h}{2\pi}$$

$\Rightarrow$

$$c = \frac{E}{p} = \frac{1}{2}v$$

$$= \frac{mv^2}{2mv}$$

2.2.1) Dispersion und Wellenpaketdynamik

<u>Phasengeschwindigkeit</u> $v_{Ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E\,\hbar}{\hbar\sqrt{2mE}}$

$$v_{Phase} = \sqrt{\frac{E}{2m}} \neq \frac{p}{m} = v$$

(klassisch)

<u>Gruppengeschwind.</u>

$$v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\hbar\frac{dk}{dE}}$$

$$\left(k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\ ,\quad E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar}\;\frac{1}{\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{E}}}$$

$$\Rightarrow v_{Gruppe} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{p}{m} = v \quad \text{(klassisch)}$$

$\Rightarrow \quad v_{Gruppe} = 2 \cdot v_{Phase} > v_{Gruppe}$

$\sim \sqrt{E} \sim \sqrt{\omega}$

in der Optik anormale Dispersion

$v_{Phase} \neq v_{Gruppe} \Rightarrow$ Dispersion, d. h. ein Wellenpaket läuft z. B. auseinander

2.2.2.2 Orts-Impuls-Unschärferelation und minimale Unschärfe

Beispiel: (Gaußförmiges Wellenpaket)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i(kx - \omega t)} \, dk = \psi(x, t)$$

mit $f(k) = e^{-\gamma^2 (k - k_0)^2}$ (nicht in Normalform)

mit der Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 (k - k_0)^2 + i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} \omega\right)} \, dk$$

mit der Substitution $q = k - k_0$

$\Rightarrow k = k_0 + q$

$$\psi(x,t) = e^{i\left(k_0 x - \frac{\hbar k_0^2}{2m} t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 q^2} e^{iqx} e^{-i\frac{\hbar}{2m}(2k_0 q + q^2)} \, dq$$

aus Bronstein: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aq^2 + bq + c} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right)$

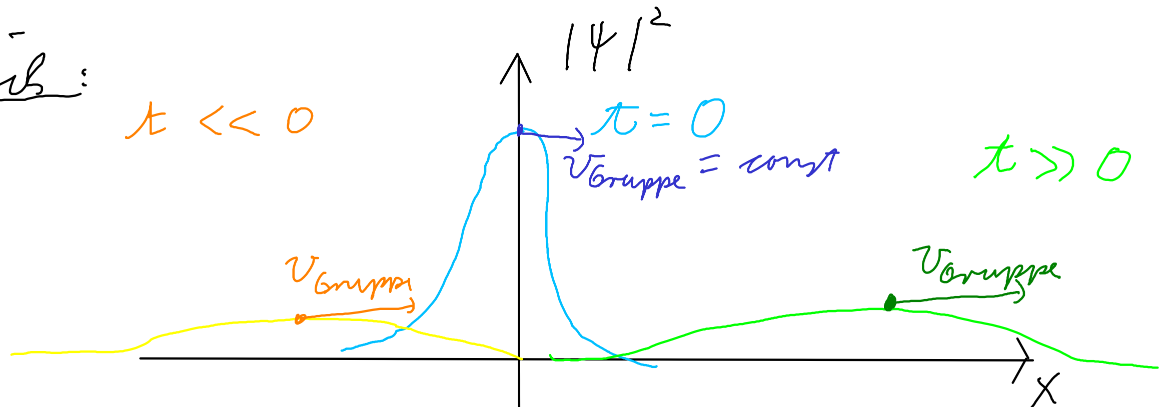
$$\Rightarrow \quad \psi(x,t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \sqrt{\frac{\pi}{\underbrace{\gamma^2 + i\frac{\hbar}{2m} t}_{=\Gamma^2(t)}}} \cdot \exp\left(\frac{-\left(x - \underbrace{\frac{\hbar}{2m} 2 k_0}_{v_{Gruppe}} t\right)^2}{4\left(\gamma^2 + i \frac{\hbar}{2m} t\right)} \right)$$

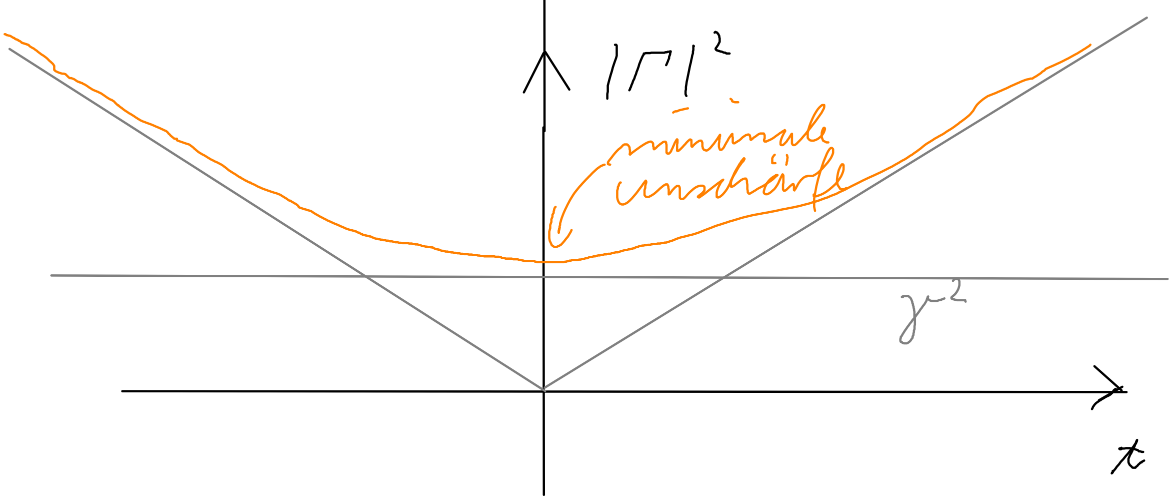
$$\Rightarrow \quad \psi(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(t)} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} e^{-\frac{(x-R(t))^2}{4\Gamma^2(t)}}$$

mit dem Schwerpunkt $R(t) = v_{Gruppe} \cdot t$

und der Breite Γ mit $\Gamma^2(t) = \gamma^2 + i \frac{\hbar}{2m} t$

Graphisch:





Präzisierung

Normalform

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}$$

σ_x = Standardabweichung

$\Rightarrow \quad \sigma_x \gtrsim \gamma \quad$ (bezieht sich auf $|\psi|^2$)

und mit

$$f^2(k) = e^{-2\gamma^2 (k-k_0)^2}$$
$$= e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}}$$

$$\Rightarrow \sigma_k^2 = \frac{1}{4\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_k = \frac{1}{2\gamma}$$

oder mit $\sigma_p = \hbar \sigma_k$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}}$$