letztes mal: $\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ Unschärferelation

gilt auch für Lichtwellen

σ_x Standardabweichung des Ortes (Abweichung der Einzelmessung)

σ_p " des Impulses

Zahlenbeispiel:

$m = 1g$, $\sigma_x = 1\,\mu m$

d.h. $\sigma_p \geq 10^{-28}\ \frac{kg\,m}{s}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_v = \frac{\sigma_p}{m} \geq 10^{-25}\ \frac{m}{s}$$

aber: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$, $\sigma_x = 1\,\mu m$

d.h. $\sigma_p \geq 10^{-28}\ \frac{kg\,m}{s}$

$$\sigma_v \geq 100\ \frac{m}{s}$$

wegen der Dispersion der Elektronenwellen

Oft: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

"Ort und Impuls können nicht gleichzeitig scharf gemessen werden"

! Diese Aussage bezieht sich auf die Einzelmessung, nicht jedoch auf den Mittelwert.

Ähnliche Unschärferelationen gelten auch für andere Observablen $\hat{G}$

Allgemeine Definition:

$$\sigma_G = \sqrt{\langle (\hat{G} - \langle \hat{G} \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi}$$

Man kann zeigen, dass gilt (ohne Beweis)

$$\sigma_A \, \sigma_B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \underbrace{[\hat{A}, \hat{B}]}_{:= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}} \rangle_\psi \right|$$

$\hat{=}$ Kommutator

Beispiel:

$$\hat{A} = \hat{x} = x$$
$$\hat{B} = \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) - \underbrace{\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x\right)}_{\text{Produktregel}}$$

$$= x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-i\hbar + x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$$
$$= i\hbar$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_x \, \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

2.2.3 Geladenes Teilchen im hom. el. Feld

Klassisch: Betrachte Elektron $q = -e$

$$m\ddot{x} = -e\tilde{E}_0$$

$\tilde{E}_0$: el. Feldstärke

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{e\tilde{E}_0}{2m} t^2 \quad = \text{gleichförmig Beschleunigte Bewegung}$$

Potentielle Energie: $V(x) = +e\vec{E}_0 x$

Quantenmechanisch

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + e E_0 x\right)\psi = E\psi$$

el. Feld   Energie

mit der Substitution

$$X := x\left(\frac{2 m e \tilde{E}_0}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2mE}{\hbar^2}\left(\frac{2 m e \tilde{E}_0}{\hbar^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dX^2}\psi(X) = X\,\psi(X)$$

Dies ist eine Standard-NL ODGL mit Lösung

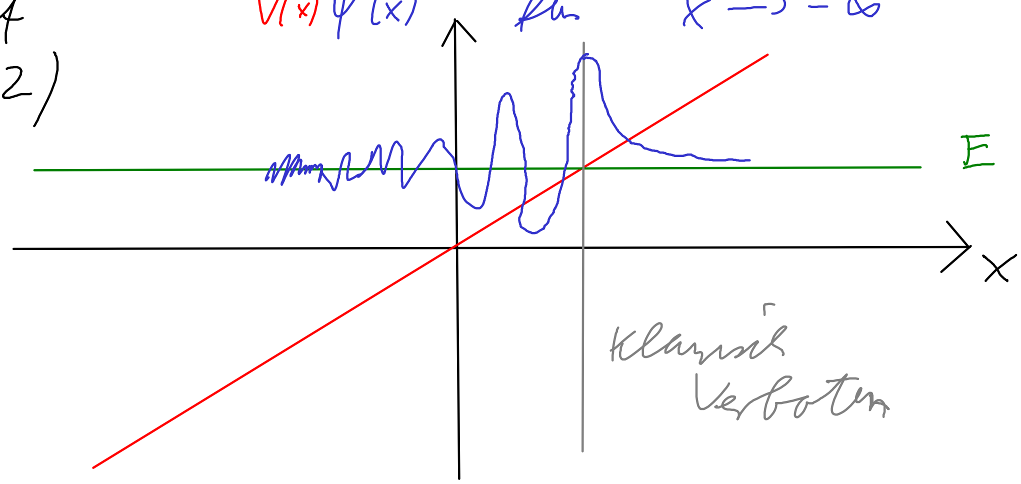
$$\psi(x) = A_i(x) \;\hat{=}\; \text{Airy-Funktionen}$$

Eigenschaften:

- exp. Abfall für $x \to +\infty$
- Oszillationen mit Periode $\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x \to -\infty$

(auch auf Folie 2)

$V(x)$ $\psi(x)$



2.2.3.2 Harmonisch oszillierendes Feld

Klassisch:

$$m\ddot{x} = -e\tilde{E}_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = -\frac{e\tilde{E}_0}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$\Rightarrow$ kin. Energie $= \frac{1}{2} m v^2(t)$ oszilliert $\sim \sin^2$

Zyklusmittel $\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^2 \tilde{E}_0^2}{m\omega_0^2}$

ponderomotorische Energie

(wichtige Größe in der Atomphysik bei Atomen in starkem Laserlicht

Quantenmechanik

$\hat{H} = \hat{H}(t)$ explizit zeitabhängig

$$= \frac{(\vec{p} - q\vec{A}(t))^2}{2m} + V(x,t)$$ (siehe Kap. 2.1.1)

zur Erinnerung

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

verschiedene Eichungen möglich

(i) Elektrische Feld Eichung (nicht relativistisch invariant)

d.h. wähle $\vec{A}(\vec{r},t) = 0$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + e\,x\,\tilde{E}_0 \cos(\omega_0 t)\right)\psi(x,t)$$

nicht analytisch geschlossen lösbar

(ii) Strahlungseichung (Lorentzinvariant)

d.h. wähle $\phi(\vec{r},t) = 0$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e\tilde{E}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)^2 \Psi(x,t)$$

Ansatz: (siehe erstes Übungszettel)

$$\Psi(x,t) = e^{ikx}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-i\omega_n t}$$

Seitenbanden

$$\hbar\omega_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \langle E_{\sin}\rangle + n\cdot\hbar\omega_0$$

Verschiebung

$\langle E_{\sin}\rangle \geq 0$

Volkov-Zustände

...

$$\Rightarrow a_n = e^{i\frac{\pi}{2}n}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(\frac{\langle E_{\sin}\rangle}{2\hbar\omega_0}\right)\cdot J_n\left(-\frac{k\tilde{E}_0 e}{m\omega_0^2}\right)$$