

## Stern-Gerlach Versuch

In einem inhomogenen (statischen) Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$  wirkt auf einen mag. Dipol  $\vec{\mu} = (0, 0, \mu)$  eine Kraft.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

potentielle Energie  $V$ :  $V = -\mu \cdot B$

→ Nachweis der Richtungsquantelung bzw. des diskontinuierlichen magnetischen Momentes von Atomen ✓

Aber: Für  $l=0 \Rightarrow m_l=0$  also  $\langle L_z \rangle = 0$  erwarten wir keinen Effekt.

Kann misst aber ein mag. Moment  $= \pm \mu_B$

⇒ Elektronen selbst haben einen Drehimpuls, verknüpft mit einem mag. Moment

29.05.'08

## 3) Wellen mehrerer ununterscheidbarer Teilchen

### 3.1 Spin und mag. Moment des Elektrons

Neben ihrer Masse  $m$  und der Ladung  $-e$  haben die Elektronen noch eine weitere Eigenschaft, ein Spin  $S$ , einen Eigen Drehimpuls.

Es gilt:

$$S = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar$$

$$\text{vgl: } L = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$$

(Kap 24.1)

und:

$$S_z = m_s \cdot \hbar$$

$$L_z = m_l \cdot \hbar$$

aber:  $s = \frac{1}{2}$ , also nicht ganzzahlig (aber ganzzahlige Schritte)

$$\Rightarrow m_s = \pm \frac{1}{2} \text{ bei } s = \frac{1}{2}$$

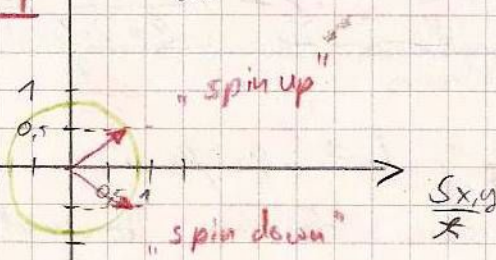
Es folgt das magnetische Moment  $\mu_s$ :

$$\mu_s = -m_s \cdot g_s \cdot \mu_B$$

$$\mu = -m_l \cdot g_l \cdot \mu_B \quad (\text{Kap 24.3})$$

aber:  $g_s = 2,0023 \approx 2$

$$\uparrow \frac{S_z}{\hbar} \quad g_l = 1$$



$$s = \frac{1}{2} \quad S = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right)} \cdot \hbar = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \hbar = 0,866 \cdot \hbar$$

$$m_s = 0,5, -0,5$$



Absetzen davon resultiert ein

$$\boxed{\text{Gesamtdrehimpuls} = \text{Bahndrehimpuls} + \text{Spin}} \quad (\text{Luis})$$

und ein

$$\boxed{\text{Gesamtdr. Moment} = \text{Bahn dr. Moment} + \text{Spin dr. Moment}} \quad \text{Kap 3.1.2}$$

Beachte: hier müssen Vektoren addiert werden.

Gesamtdrehimpuls  $J$ : (das  $j$  ist Halbzahlig)

$$\boxed{J = \sqrt{j(j+1)} \hbar} \quad \text{mit } j = |l \pm s| \quad s = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{L = \sqrt{l(l+1)} \hbar} \quad (\text{Kap 2.4.1}) \quad \text{mit } l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

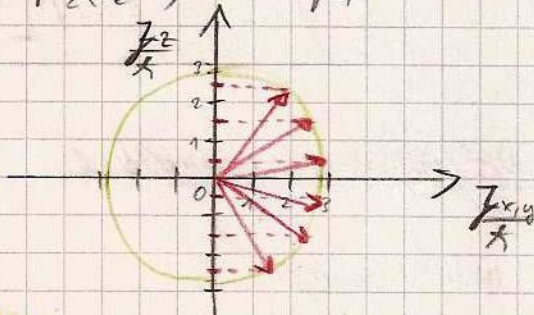
und  $J_z = m_j \cdot \hbar$   $m_j = -j, \dots, 0, \dots, +j$  ( $2j+1$ ) Möglichkeiten

$$\boxed{L_z = m_l \cdot \hbar} \quad m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

Beispiel:  $j = \frac{5}{2}$  ( $= |l - \frac{1}{2}|$ ) ( $j$  Gesamtdrehimpulsquantenzahl)

$$\Rightarrow J = \sqrt{\frac{5}{2}(\frac{5}{2}+1)} \hbar = \sqrt{\frac{35}{4}} \hbar \approx 2,96 \hbar$$

$(2j+1) = 6$  Möglichkeiten



### 3.1.1.1 Feinstrukturkonstante

Beispiel: (H-Atom)

Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung und relativistischer Masseneinordnungseffekte (gleiche Größenordnung) führt zu den Eigenenergien (Dirac).  $\vec{B} = 0$

$$\boxed{E_{nj} = -\frac{R_H}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n} \cdot \left( \frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right)}$$

Kap 2.4.2

kleine (feine) Korrektur

$\alpha$ : Feinstrukturkonstante

$$\alpha := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c_0} \approx \frac{1}{137}$$

$$\alpha = \frac{v_1}{c_0}$$

$\alpha$  kann als das Verhältnis der Elektronengeschwindigkeit auf der 1. Bohrschen Bahn  $v_1$  und der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$  interpretiert werden.



Eine systematische theoretische Beschreibung des Elektronenspins ist möglich im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik. (Dirac-Gleichung)

Diese Diskussion liefert  $g_s = 2$ . Berücksichtigt man weiterhin quantum elektrodynamische Effekte (=Quantenoptik) erhält man

$$g_s = 2,0023$$

aus der relativistischen QM ergeben sich die Spinoperatoren

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Pauli-Matrizen}$$

$$\Rightarrow \hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \hbar^2 \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren von  $\hat{S}_z$  sind offensichtlich  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit den Eigenwerten  $\pm \frac{\hbar}{2}$

Mit Spin wird die elektronische Wellenfunkt. zu einem "E-Vektor"

$$\Psi(\vec{r}, t) \rightarrow \Psi_+ (\vec{r}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_- (\vec{r}, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_+ (\vec{r}, t) \\ \Psi_- (\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

Durch das magnetische Moment des Elektrons  $\mu_s$  resultiert eine Energie im stationären homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$

$$E = \pm \frac{\hbar}{2} g_s \mu_B \cdot B \Rightarrow \text{Zeeman-Energie des Elektrons} = m_s \quad \text{vgl. } E = +m_l g_l \mu_B \cdot B \quad (\text{Kap 2.4.3})$$

### 3.1.1. Spin-Bahn Kopplung

Die Bahnbewegung des Elektrons ( $L \neq 0$ ) führt zu einem mag. Moment, einem lokalen Magnetfeld im Atom. Dieses kann an den Spin des Elektrons über die Zeeman-Energie des Elektrons ankopplern.

Es gilt: 
$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} + \underbrace{\frac{e}{m} \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{B}}_{\text{①}} + \underbrace{\frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi m^2} \frac{1}{r^3} (\vec{L} \cdot \vec{S})}_{\text{②}}$$

$m$ : Ruhemasse des Elektrons

①: Zeeman-Energie (3.1)  $E = \pm \frac{\hbar}{2} g_s \mu_B \cdot B$

②: kann auch aus dem Bohrschen Atommodell gewonnen werden.

$\vec{S}$ : ein "Vektor"  $\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$

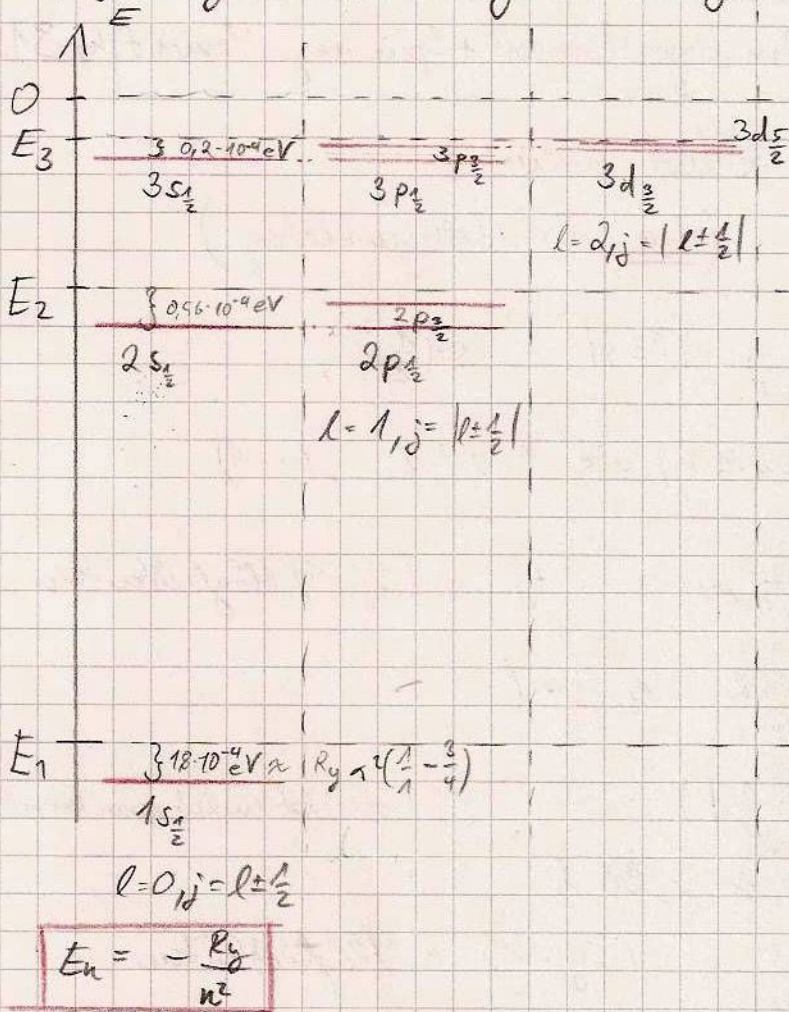


# Gesamt auf 1. Schiefer Bahn

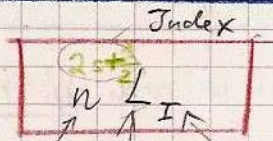
$$V_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

3.06.08

- winzige Effekte  $\frac{\Delta E}{E} < 10^{-4}$
- Aufhebung der Entartung (war  $n^2$ -fach entartet)



## Schreibweisen



Hauptquantenzahl Index Gesamt Drehimpulsquantenzahl (in Einheit von  $\hbar$ )  
 Bahndrehimpulsquantenzahl

für  $l$ :

$l$	Bezeichnung $l < \infty$ (wie $l < \infty$ )	Ursprung
$l=0$	s (S)	sharp
$l=1$	p (P)	prinzipal
$l=2$	d (D)	diffuse
$l=3$	f (F)	fundamental
$l=4$	g (G)	?
$l=5$	h (H)	

Es verbleibt die Entartung bzgl. der Drehimpulsquantenzahl  $l$ .

Beispiel:

$$2s_{1/2} = 2p_{1/2} \quad (\text{gleiche Energie})$$

$$j = |l \pm \frac{1}{2}|$$

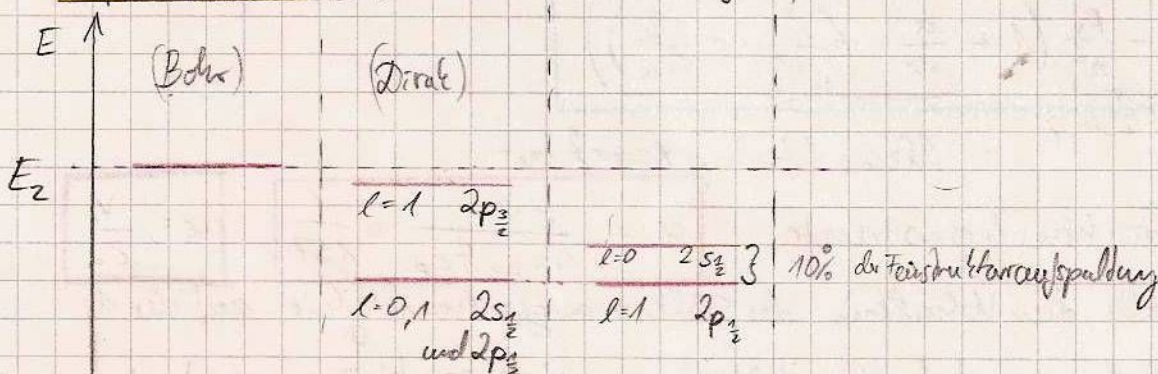
$l=0$

$$j = |l \pm \frac{1}{2}|$$

$l=1$

Diese Entartung ist aber „zufällig“. Beim Wasserstoffatom wird sie durch die Lamb-Verchiebung aufgehoben.

Experiment: (Lamb und Rutherford)

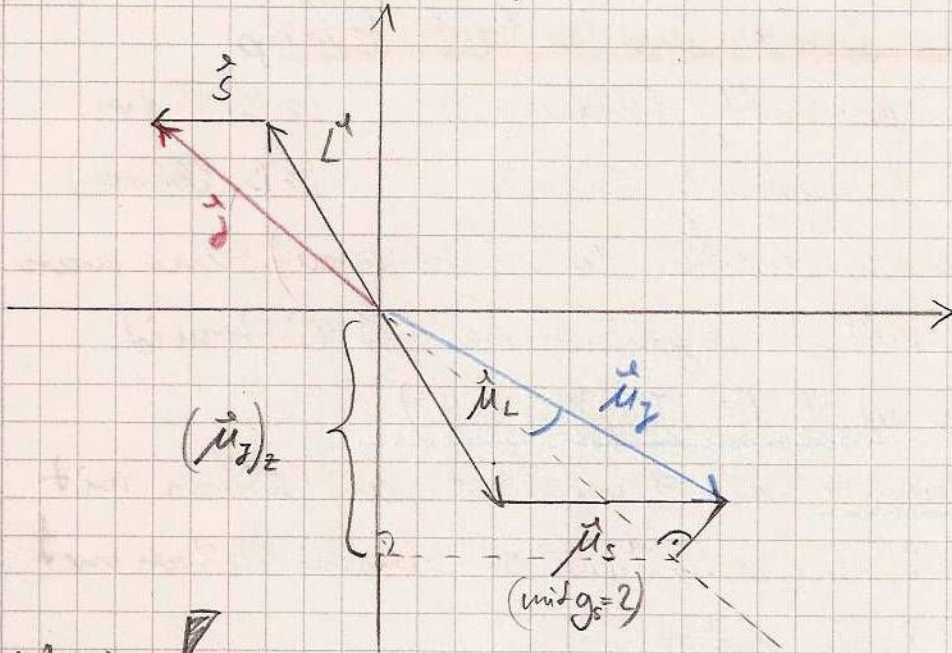
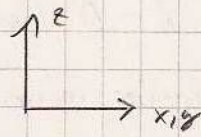




# Theorie: relativistische QM und Quantenelektrodynamik

## 3.1.2 Landé'scher g-Faktor

Gesamtes magn. Moment  $\vec{\mu}_j$ :



Wichtig!

$\vec{j} \neq \vec{\mu}_j$ , Das kann klassisch nicht auftreten (klassisch  $\vec{\mu} \parallel \vec{A}$ )

Heuristische Vorgehensweise:

Projiziere  $\vec{\mu}_j$  auf die  $\vec{j}$ -Achse.

$$(\mu_j)_z = -m_j \cdot g_j \cdot \mu_B$$

mit dem Landé'schen g-Faktor.

$$g_j = g_e \frac{j(j+1) - s(s+1) + l(l+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

oder mit der Näherung  $g_s = 2$

$$\Rightarrow g_j \approx 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Beispiel:  $j = \frac{5}{2}, l = 3, s = \frac{1}{2}$

$$g_j = 1 + \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot 4}{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} < 1$$

"spin arbeitet gegen den Bahndrehimpuls"

$$j = \frac{5}{2} = \left| 3 - \frac{1}{2} \right|$$

↓  
Spin



Beispiel:  $s = 0$  (bei  $e^-$  also nicht der Fall)  $g_D = g_L = 1$

$l = 0$  (möglich bei  $e^-$ )  $g_D = g_L = 2$

(vgl. Funktionsweise eines permanent Magneten)

### 3.2 Fermionen, Bosonen und das Pauli-Prinzip

BOSONEN := Spin ganzzahlig (inklusive 0) (z.B. Photon)

FERMIONEN := Spin halbganzzahlig (ohne 0) (z.B. Elektron)

Bei ununterscheidbaren Teilchen (z.B. 2 Elektronen) kann man quantenmechanisch nicht mehr sagen, wo ein best. Elektron ist.

Die Wellenfunktion ist  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{r}_2, \vec{s}_2, t)$

$|\Psi|^2$  ist eine kombinierte Wahrscheinlichkeit, ein Elektron mit Spin  $\vec{s}_1$  am Ort  $\vec{r}_1$  zu finden und ein anderes Elektron mit Spin  $\vec{s}_2$  am Ort  $\vec{r}_2$  zu finden.

(mit  $\int \vec{r}_1$  und  $\sum \vec{s}_1 \Rightarrow$  Wahrscheinlichkeit von  $e^-$  mit  $\vec{s}_2$  am  $\vec{r}_2$ )

Schreibweise:

$$\Psi(\underbrace{\vec{r}_1, \vec{s}_1}_1, \underbrace{\vec{r}_2, \vec{s}_2}_2, t) =: \Psi(1, 2, t)$$

Produkt der Quantenmechanik

- Bei FERMIONEN ist die Wellenfunktion antisymmetrisch bzgl. der Vertauschung der Teilchen, d.h.

$$\Psi(1, 2, t) = -\Psi(2, 1, t)$$

$\Rightarrow \Psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{r}_1, \vec{s}_1, t) = 0$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit zwei Elektronen mit gleichem Spin am gleichen Ort zu finden ist identisch Null.

Pauli-Prinzip

- Bei BOSONEN ist die Wellenfunktion symmetrisch bzgl. der Vertauschung zweier Teilchen

$$\Psi(1, 2, t) = \Psi(2, 1, t)$$

$\Rightarrow \Psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{r}_1, \vec{s}_1, t) \neq 0$  das heißt zwei BOSONEN mit gleichem Spin können durchaus am gleichen Ort gefunden werden.

Bei  $N > 2$  Teilchen entsprechend