· Wellenfkt. in SGL $\Rightarrow \Psi$

Ψ für Fermionen muss $\Psi(1,2,t) = -\Psi(2,1,t)$

Ψ bei Bosonen symmetrisch

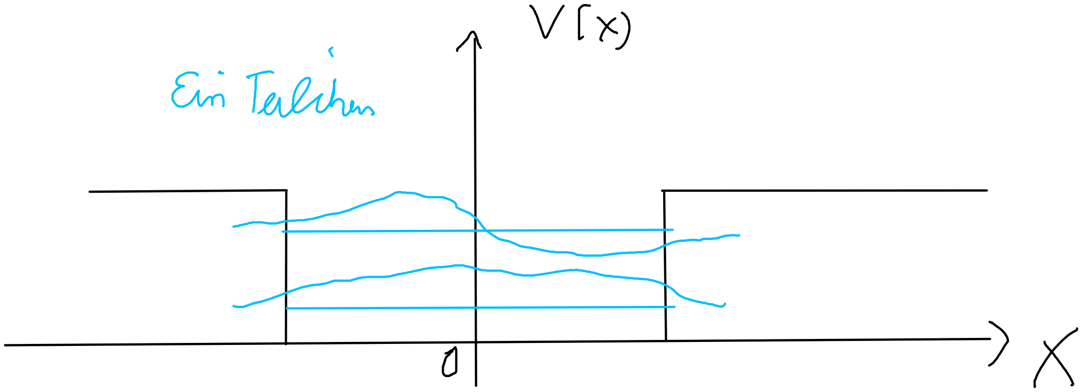
• Bei BOSONEN ist die Wellenfkt. symmetrisch bzgl. vertauschen zwei Teilchen

$$\Psi(1,2,t) = + \Psi(1,2,t)$$

$\Psi(\vec{r}_1, s_1, \vec{r}_1, s_1, t) \neq 0$, d. h. zwei Bosonen mit gleichem Spin können am gleichen Ort gefunden werden.

Bei $N > 2$ entsprechend.

3.2.1 Zwei Elektronen im Potentialtopf
Verschränkte Zustände



a) Beide Spin identisch $(S_1 = S_2)$

daher unterdrücken des Spin ($\hat{=}$ Weglassen)

1D stat. Schröd. Gl:

$$\hat{H}\, \Psi(x_1, x_2) = E\, \Psi(x_1, x_2)$$

mit dem Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_1(x_1) + V_2(x_2)$$

~~+ Coulomb WW der e^-~~

vernachlässigen, ist ja nur winzig

Ansatz

$$\Psi_{n,m}(x_1, x_2) = \psi_n(x_1) \cdot \psi_m(x_2)$$

Wellenfkt. eines Teilchens

Einsetzen:

$$\hat{H}\Psi = \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + V(x_1)\right)\psi_n(x_1)}_{= E_n \psi_n(x_1)} \cdot \psi_m(x_2)$$

$$+ E_m \psi_m(x_2) \psi_n(x_1)$$

$$= (E_n + E_m) \Psi_{n,m}(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow E_{nm} = E_n + E_m$$

ABER Ansatz ist nicht kompatibel mit dem Pauli-Prinzip für Fermionen

Neuer Ansatz: (Superposition)

$$\Psi_{n,m}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_n(x_1)\,\psi_m(x_2) - \psi_n(x_2)\,\psi_m(x_1)\right)$$

x_1, x_2 Vertauscht!

$\hat{=}$ Verschränkter Zustand

$\neq$ Produkt aus Ein-Teilchen

klar: $\Psi_{n,m}$ löst SGL,

erfüllt Pauli-Prinzip

Nun: für $n = m$ (beide El. im gleichen Zustand)

$$\psi_{n,n}(x_1, x_2) = 0$$ (triviale Lsg., keine Lsg.)

d.h. zwei Elektronen gleichen Spins können nicht im gleichen Einteilchen-Zustand sein. (= Folge des Pauli-Prinzip)

für $n \neq m$ $$\psi_{n,m}(x_1, x_2) = - \psi_{n,m}(x_2, x_1)$$

✓ Pauli-OK

---

b) Spins verschieden ($s_1 \neq s_2$)

Zur Erinnerung:

$m_s (= s) = + \frac{1}{2} \Rightarrow \psi(\vec{r}, s, t) = \psi(\vec{r}, t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$m_s (= s) = - \frac{1}{2} \Rightarrow$ " $= \psi(\vec{r}, t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ansatz

$$\psi_{n,m}(x_1, s_1, x_2, s_2) =$$

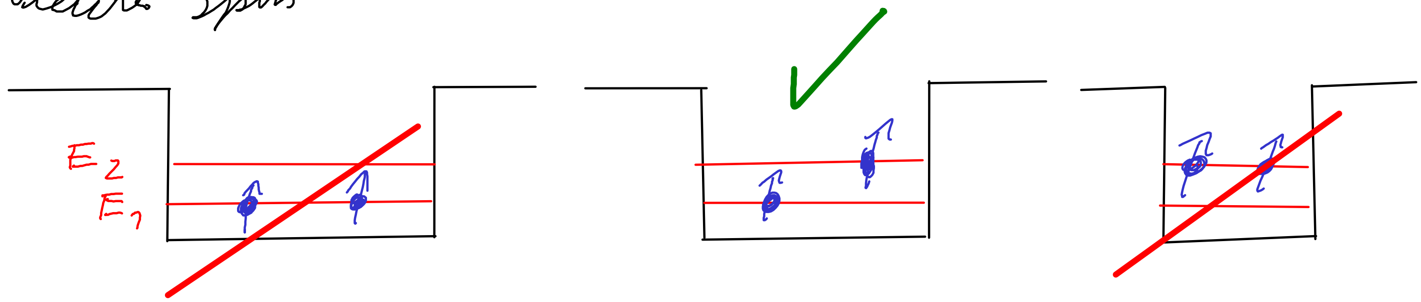
$|+\rangle\langle-|$

$$= \psi_n(x_1)\, \psi_m(x_2)\, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \right)$$ $(\langle+|-\rangle$ nein!$)$

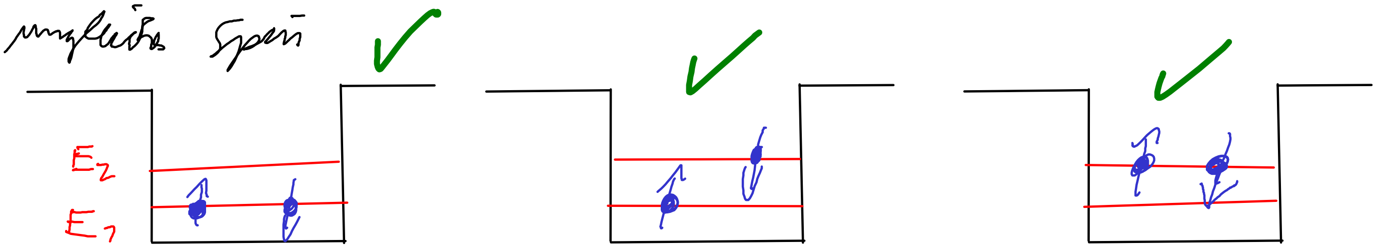
ist antisymmetrisch wegen Spinanteil, obwohl Ortsanteil beliebig ist, also auch für $n = m$ und für $x_1 = x_2$

Zwei Elektronen mit ungleichem Spin können im gleichen Einteilchensystem und/oder am gleichen Ort.

Gleiche Spins



ungleiche Spins



Verallgemeinerung auf viele Elektronen $(N \geq 2)$

$N=2$

$$\Psi(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1(1)\, \psi_2(2) - \psi_1(2)\, \psi_2(1) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) \end{pmatrix}$$

(nur Merkhilfe, kein Sinn)

$N > 2$:

$$\Psi(1,2,\ldots) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \det \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \cdots & \psi_1(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(1) & \cdots & \psi_n(n) \end{pmatrix}$$

$\hat{=}$ Slater - Determinante

$\psi_a(b)$ b. Elektron im Einteilchenzustand a

3.2.2 Zwei und mehr Bosonen im Potentialtopf

Bose-Einstein-Kondensation

Ansatz: $$\psi_{n,m}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_n(x_1)\,\psi_m(x_2) + \psi_n(x_2)\,\psi_m(x_2)\right)$$

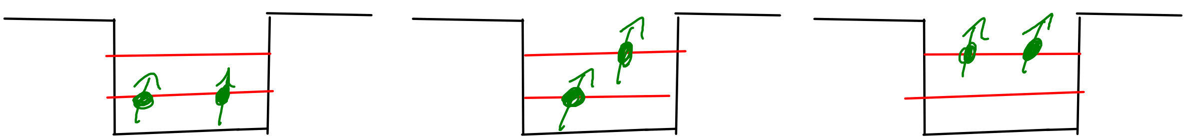
macht symmetrie

$m = n$ oder $m \neq n$

$$\psi_{n,m}(x_1, x_2) = +\,\psi_{n,m}(x_2, x_1) \quad \checkmark$$

d.h. zwei (und mehr) Bosonen können im gleichen Einteilchenzustand sein.

Spin = 1 (Hauptsache ganzzahlig)



„alles erlaubt"

(alle Teilchen im Zustand E_1 $\Rightarrow$ Bose-Einstein Kond.)

Befinden sich alle Bosonen (bzw. der größte Teil) dann spricht man von Bose-Einstein-Kondensation.