Elektronen im B-Feld

Im realen Raum $\quad r_B = \frac{m v_\perp}{eB} \quad$ (Zyklotronfreq. $\omega_c = \frac{eB}{m}$

Im k-Raum $\quad \vec{v} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k} \quad$ und $\quad \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{\hbar}\vec{F}$

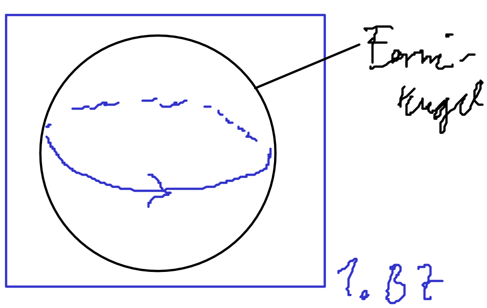
$= e\,\vec{v}\times\vec{B}$

zwei Bewegungsintegrale

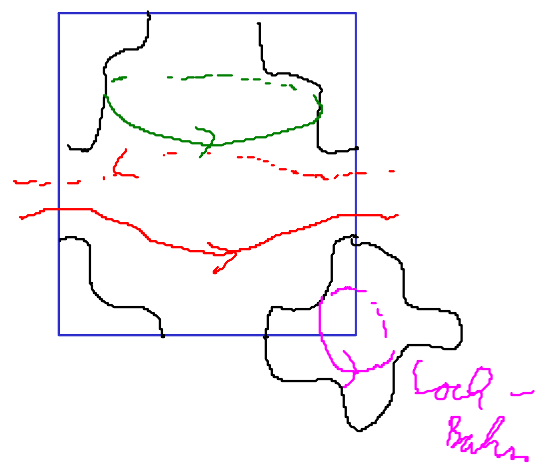
$E = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial t} = \hbar\,\vec{v}\left(-\frac{e}{\hbar}\,\vec{v}\times\vec{B}\right) = 0$

$k_\parallel = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial(\vec{k}\vec{B})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial t}\vec{B} + \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0}\vec{k} = 0$

geschlossene Bahnen



offene Bahn



Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{e}{\hbar}\,\vec{v}\times\vec{B} = -\frac{e}{\hbar^2}\,\frac{\partial E}{\partial \vec{k}}\times\vec{B}$$

im realen Raum

$$\frac{1}{B^2}\,\vec{B}\times(\vec{v}\times\vec{B})$$

$a\times(b\times c) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

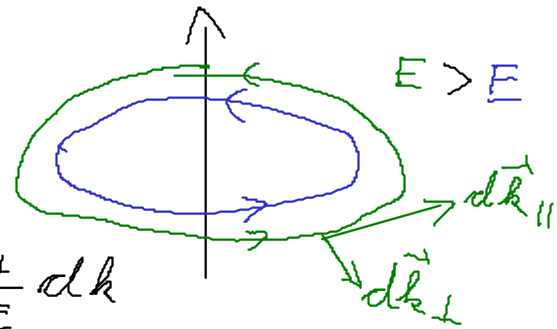
$$= \vec{v}\,\frac{\vec{B}\vec{B}}{B^2} - \vec{B}\,\frac{\vec{B}\cdot\vec{v}}{B^2} = \vec{v} - \vec{v}_\parallel = \vec{v}_\perp$$

oder $\quad \frac{1}{B^2}\,\vec{B}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = \frac{\vec{B}}{B^2}\times\frac{\partial\vec{k}}{\partial t}\left(-\frac{\hbar}{e}\right) = \underbrace{\frac{\hbar}{eB}}_{\text{Skalierung}}\cdot\underbrace{\frac{\partial\vec{k}}{\partial t}\times\frac{\vec{B}}{B}}_{\text{Drehung um } 90^\circ}$

Umlaufbahn eines Elektrons im realen Raum ist die Bahn im k-Raum skaliert um $\frac{\hbar}{eB}$ und um 90° gedreht.

Umlaufzeit $T_c = \oint dt$

$$d\vec{k} = -\frac{e}{\hbar^2}\left(\nabla_k E(\vec{k}) \times \vec{B}\right) dt$$



$$T_c = \oint \frac{|d\vec{k}|}{\left|\frac{dE}{d\vec{k}}\right|} \frac{\hbar^2}{eB} = \frac{\hbar^2}{eB} \oint \frac{dk_\perp}{dE} dk$$

$$dS = dk_\perp \cdot |d\vec{k}|$$

$$= \frac{\hbar^2}{eB} \frac{dS}{dE}$$

Vergleich: für freie Elektronen:

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \Rightarrow T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{eB} \Rightarrow \frac{dS}{dE} = \frac{2\pi m}{\hbar^2}$$

für Bloch-Elektronen ist $m = m_c$ die sog. Zyklotronmasse

($m_c \neq m^*$ entspricht nicht unbedingt der effektiven Masse)

$$m_c = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial E}$$

experimentelle Methoden: mit $\vec{B}$-Feld Fermi-Flächen ausmessen

- de Haas-van Alphen Oszillationen $\vec{H}(\vec{B})$
- Schubnikov-de Haas Oszillationen $R(\vec{B})$
- Zyklotron-Resonanz + Gantmakher-Effekt
- Magnetowiderstand, etc.

Landau Niveaus (Quantisierung der Elektronenbahnen im B-Feld)

(Kreisbahn ⇒ Selbstinterferenz)

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - e\vec{A}\right)^2 \psi = E\psi$$

Coulomb-Eichung $\left(\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ x B \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

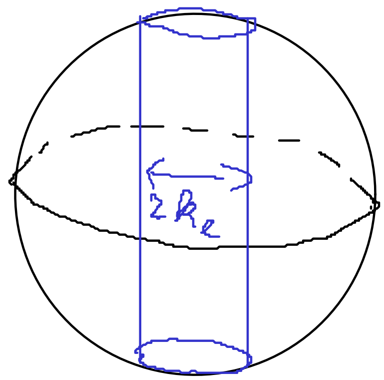
Landau-Eichung $\left(\vec{A} = \begin{pmatrix} -yB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

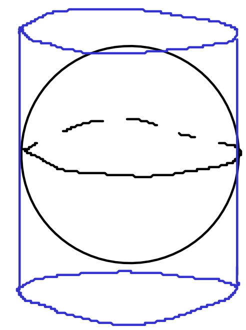
$$E = E_l + E(k_z) = \left(l + \tfrac{1}{2}\right)\omega_c \hbar + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$$E_\ell = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m} \implies \text{Zylinderflächen}$$

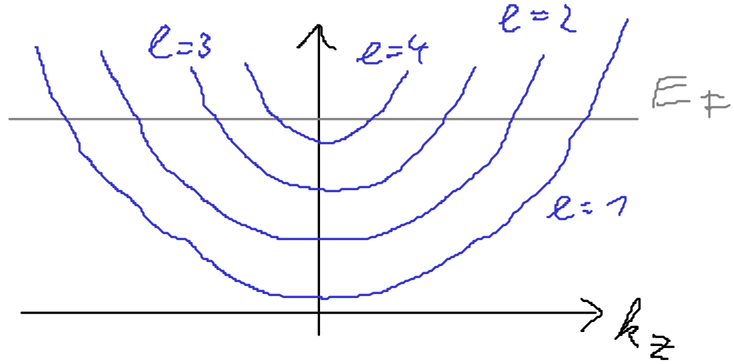
Landau-Röhren

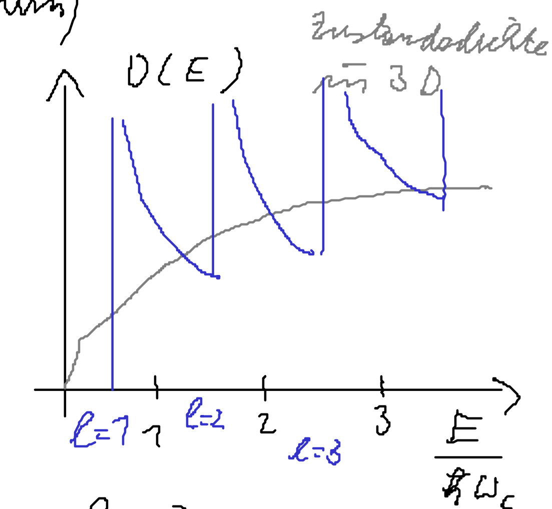
bei hohen Feldstärken





$$r_\ell = \sqrt{\left(\ell + \tfrac{1}{2}\right) \frac{2\hbar}{eB}}$$ (r_ℓ im realen Raum)





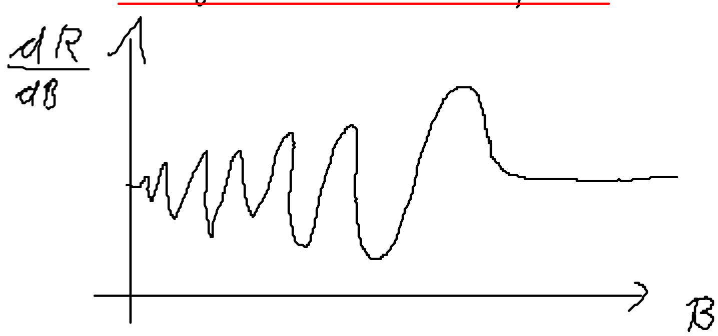
Jeder Zustand ist Entartet um $q_\ell = \frac{e}{\hbar} L^2 B$

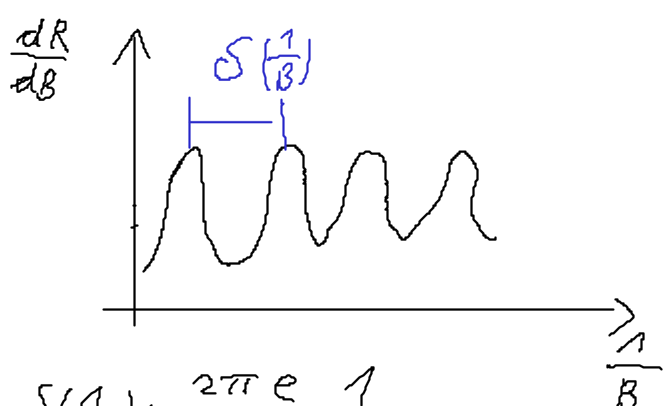
Größe des Kristalls

$g_k = \frac{V}{(2\pi)^3}$ $V = L^3$

Mikrowellenabsorption

(Zyklotronresonanz)

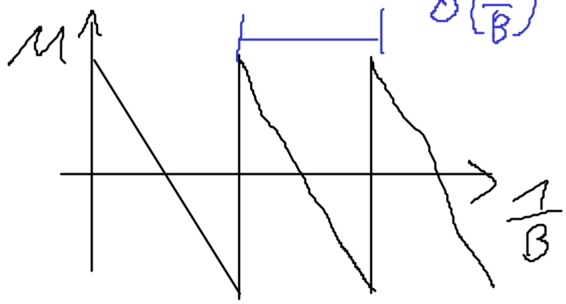


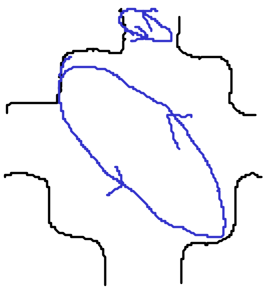


$$\delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar} \frac{1}{S_{\text{extrem}}}$$

Extremalbahnen

von Alfen-Oszillationen





$\Rightarrow$