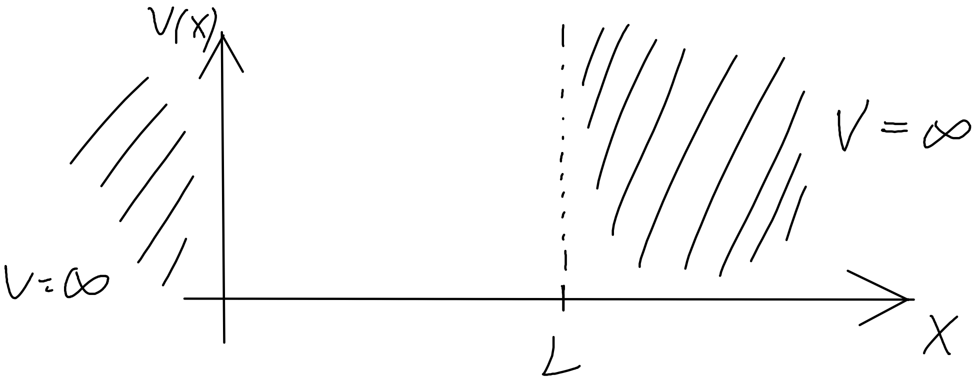
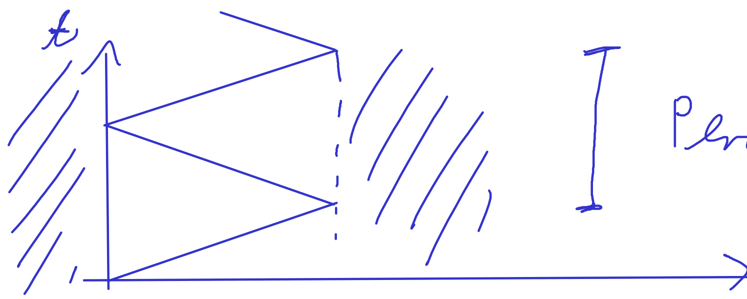
2.2.4 Der unendlich tiefe Potentialtopf



klassisch:



Periode $\frac{2\pi}{\Omega}$

Frequenz Ω kann bel. Wert annehmen (z.B. $=0$)

QM

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x<0) \vee (x>L) \\ 0 & (0<x<L) \end{cases} \Rightarrow \psi(x) = 0$$

$\Rightarrow$ Randbedingungen (wie Gitarrensaite)

$x \in [0, L]$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

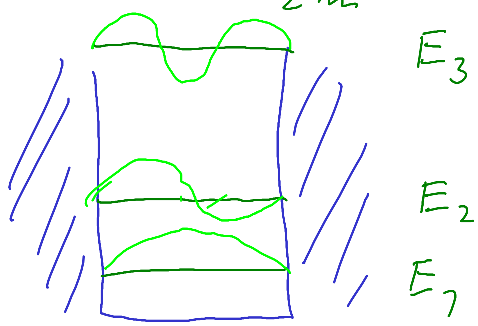
$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0\right)\psi = E\psi$$

Ansatz:

$$\psi_n(x) = \sin\left(n \cdot x \cdot \frac{\pi}{L}\right) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad +\frac{\hbar^2}{2m} n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$



Normierung:

$$\psi_n(x) \longrightarrow N \, \psi_n(x)$$

$$\int_0^L N^2 \sin^2(n \underbrace{x \tfrac{\pi}{L}}_{x'}) \, dx \overset{!}{=} 1$$

$$x' \Rightarrow x = \frac{L}{\pi} x'$$

$$= N^2 \frac{L}{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin^2(n x') \, dx'}_{= \frac{\pi}{2}} \overset{!}{=} 1$$

Fertig normierte Wellenfkt.

$$\Rightarrow \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n x \frac{\pi}{2}\right)$$

bzw. Zeitabhängige Wellenfkt.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n x \frac{\pi}{2}\right) e^{-i \omega_n t}$$

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$$

2.2.4.1 Wellenpaketdynamik

Aufgrund des Superpositionsprinzips ist z.B. die zeitunabhängige Wellenfkt. $\psi_1(x) + \psi_2(x)$

und $\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$

Normierung:

$$\psi \to N\psi$$

$$N^2 \int_0^L |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2 \, dx \overset{!}{=} 1$$

$$= N^2 \left(\underbrace{\int_0^L \psi_1^2(x)\, dx}_{1} + \underbrace{\int_0^L \psi_2^2(x)\, dx}_{1} \right.$$

$$\left. + \underbrace{\int_0^L \psi_1(x)\, \psi_2(x)\, dx}_{=0} \right) \overset{!}{=} 1$$

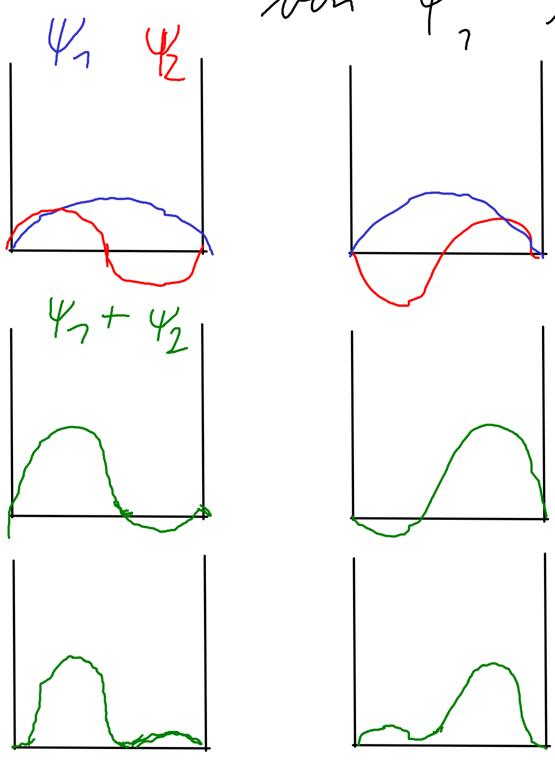
$$\Rightarrow \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) \right)$$

Was ist das Verhalten von $|\psi(x,t)|^2$?

Anschauliche Interpretation:

Konstruktive oder destruktive Interferenz von ψ_1 und ψ_2



Beide zu versch. Zeitpunkten

Die Summe - konstr. und destr. Interferenz (Schwebung)

Quadrat - der Schwerpunkt (Erwartungswert) oszilliert

Erwartungswert von x = Mittelwert oszilliert in Folge aus Schwebung mit der Frequenz

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1$$

Bestimmung der Schwerpunktsbewegung:

$$\langle x \rangle_t = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\psi_1^*(x,t) + \psi_2^*(x,t) \right) \cdot x \cdot \left(\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \Bigg(\underbrace{\int_0^L |\psi_1|^2 \cdot x \, dx}_{\frac{L}{2}} + \underbrace{\int_0^L |\psi_2|^2 \cdot x \cdot dx}_{\frac{L}{2}} + \underbrace{\int_0^L \left(\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^* \right) dx}_{} \Bigg)$$

$$= 2\cos(\Omega t) \underbrace{\int_0^L \psi_2 \cdot x \cdot \psi_1 \, dx}_{}$$

$\psi^* = \psi$ da reell

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(2x\frac{\pi}{L}\right) \cdot x \cdot \sin\left(x\frac{\pi}{L}\right) dx$$

Subst. $\xi = x\frac{\pi}{L} \Rightarrow x = \frac{L}{\pi}\xi$

$$= \frac{2}{L} \frac{L^2}{\pi^2} \underbrace{\int_0^\pi \sin(2\xi)\, \xi \sin(\xi)\, d\xi}_{-\frac{8}{9}}$$

alles zusammen:

$$\langle x \rangle_\psi (t) = L \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \cos(\Omega t) \right)$$

$0{,}16$

mit $\Omega = \omega_2 - \omega_1$; $\hbar\omega_1 = E_1$; $\hbar\omega_2 = E_2$

Dieser Überlagerungszustand mit beschleunigter harmonischer Bewegung führt zur Abstrahlung el. mag. Wellen (Hertzscher Dipol).

$|\psi_1|^2$ oder $|\psi_2|^2$ strahlen <u>keine</u> Energie ab, daher sind es stabile Zustände.

$\Rightarrow$ einfaches Modell für die diskreten Emissionslinien beim Atom (siehe Kap. 1.1.3)

Bei Einstrahlung:

wir erwarten, dass bei Einstrahlung von Licht bei Freq. Ω einen Überlagerungszustand anregen wird.

2.2.5 Das 2-Niveau-Modell

Ein Quanten-Bit – die Bloch-Gleichungen

Ein eingestrahltes el. Feld

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$$

führt zu einer zusätzlichen, Pot. Energie für ein Elektron (Ladung $q = -e$) $\hat{H} \to \hat{H}(t)$

$x \in [0, L]$

$$\hat{H}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + e \cdot x \cdot E(t)$$

Dieses Problem ist i. A. nicht exakt analytisch lösbar.

<u>Näherung</u>: Betrachte nur Überlagerungszustand an (z.B. $n=1$ und $n=2$ / OK, falls $\omega_0 \approx \Omega$ = resonante Einstrahlung)

also:

Bel. viele weitere möglich

$$\psi(x,t) = a_1(t)\,\psi_1(x) + a_2(t)\,\psi_2(x) \ldots$$

Normierung:

$$\int_0^L |\psi(x,t)|^2\,dx \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad |a_1(t)|^2 + |a_2(t)|^2 = 1$$

Ziel: Bestimmung der beiden komplexwertigen Koeff.

$a_1(t)$ und $a_2(t)$ $(4 - 1 = 3$ unabh. Größen$)$

Normierung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + e\cdot x\cdot E(t)\right)\psi(x,t)$$

$$i\hbar\,\dot{a}(t) = E_1 a_1 - d\,E(t)$$

mit d Dipolmatrixelement

$$d = -e\int_0^L \psi_1^*(x)\cdot x\cdot\psi_2(x)\,dx$$

$\cdot\ \psi_1^*(x,t)$

$\int_0^L dx$

dann fällt

$\int \psi_2\,\psi_1^* = 0$

$\int \psi_1\,\psi_1^* = 1$

*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + e\left(x - \frac{L}{2}\right)E(t)\right)\psi(x,t)$$