

letztes mal: Teilchenstromdichte

\Rightarrow Transmissionskoeffizient

Aus der Wellenfunktion lässt sich Teilchenstrom berechnen,
damit auch Reflexion und Transmission.

Formal: Stetigkeit und Stetigkeit der Ableitung
kommen sich in Matrix-formalismus bringen

\Rightarrow Transfer Matrix Methode

2.3 Zweidimensionale Probleme

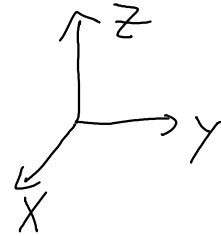
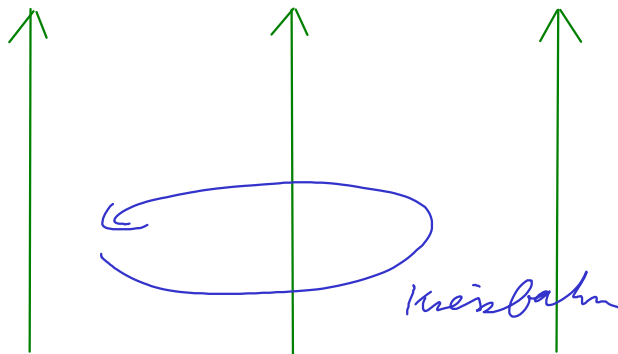
2.3.1 Geladenes Teilchen im statischen

homogenen Magnetfeld

Landau - Zustände

klassisch:

$$\vec{B} \neq \vec{B}(\vec{r}), \quad B = \text{rot } \vec{A}$$



Kreisbahn mit Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{eB}{m}$
und frei Bewegung in z-Richtung

Hamilton - Funktion

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2$$

$q = -e$

wähle Landau - Eichung mit $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{A}$

mögliche Wahl $A = \begin{pmatrix} 0 \\ B \cdot x \\ 0 \end{pmatrix}$

hier ist die $A = 0$ ($\hat{=}$ Landau - Eichung)

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + \underbrace{(p_y + e\beta x)^2}_{=: m\omega_0^2 \tilde{x}^2} \right)$$

(ganze Klammer ist $\sim \tilde{x}^2$)

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = 1$$

QM

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\text{frei Bewegung in } z\text{-Richtung}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \tilde{x}^2}_{\text{harmonischer Oszillator}}$$

\Rightarrow Energie - Eigenwerte: E_z

$$E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$$\uparrow$$

$$\frac{e\beta}{m}$$

\uparrow
bei z -dir. Bewegung = 0

Landau - Niveaus

2.4 Dreidimensionale Probleme

2.4.1 Drehimpulsquantisierung

zur Erinnerung: Bohrsches Atommodell (Kap 7.2)

Energie $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}$ ($\neq 0$)

Drehimpuls $L_n = n \hbar$ \uparrow gleiches n (bei Bohr)

(nur z -Komponente)

Drehimpulsoperator ($L = r \times p$)

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times (-i \nabla)$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}^2$$

Beachte: $[L^2, L_z] = 0$ (Kommutator = 0)

\Rightarrow gleichzeitige scharfe Messung ist möglich
(siehe Kap 2.2.2.2)

(nicht für zwei Drehimpulse gleichzeitig:

z.B. $[L_x, L_y] \neq 0$)

somit: $\hat{L}^2 \psi = L^2 \psi$
 $\hat{L}_z \psi = L_z \psi$
Empiriewerte

Lösung: (ohne Herleitung) in Kugelkoordinaten

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) \hbar^2 Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$$

$\Downarrow L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar$

$$\hat{L}_z Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) = m_\ell \hbar Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$$

$\ell \in \mathbb{N}_0$; $m_\ell \in \mathbb{Z}$ ($-\ell \leq m_\ell \leq \ell$)

m_ℓ ist oft nur m ,

$Y_{\ell m}$ sind die Kugelflächenfunktionen

Stehende Wellen
in φ

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_{\ell m} P_{\ell m}(\cos \theta) e^{i m_\ell \varphi}$$

wie Bohr'sches
Atommodell

mit Legendre - Polynom

$$P_{\ell m}(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell$$

und der Normierungsfaktor

$$N_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}$$

Beispiele:

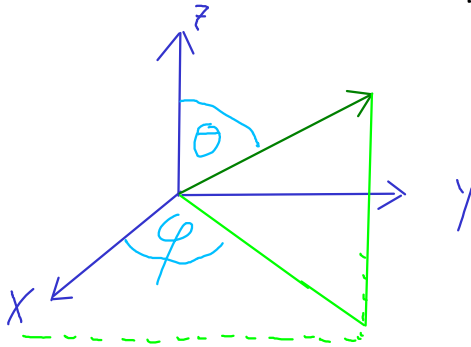
$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \text{const}$$

$$L = \hbar$$

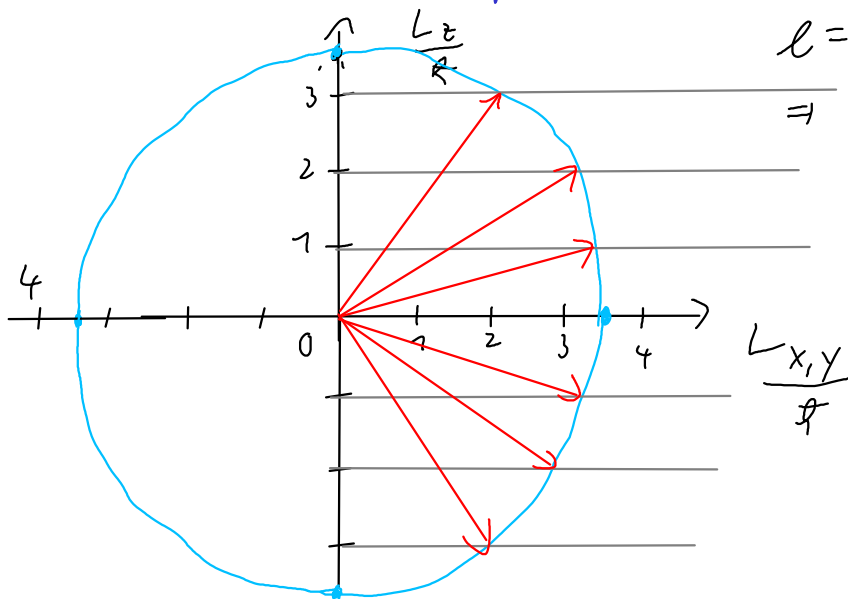
$$L_z = 0$$

$$Y_{10} = \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \cos \theta \quad ; \quad Y_{11} = -\frac{3}{\sqrt{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{-i\varphi}$$

Zur Erinnerung:



Vektoranstellung der Eigenwerte



$$l=3$$

$$\Rightarrow m_l = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$l=3 \Rightarrow L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \hbar \approx 3,5 \hbar$$

2.4.2 Das Wasserstoff-Atom

Das H-Atom besteht aus einem einfach pos. geladenen Kern (= Proton) mit Masse $1,678 \cdot 10^{-27}$ kg und dem einfach neg. geladenen Elektron mit Masse $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

Wir approximieren das Proton als unendlich schwer, und im Ursprung fixiert.

(sonst reduzierte Masse und Schwerpunktsbewegung)

$$\Rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

Eigenfunktionen:

$$\hat{H} \psi = E \psi$$