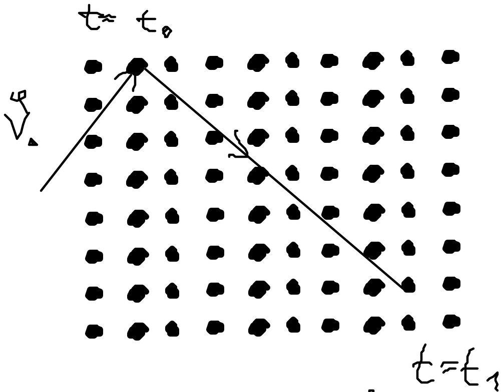
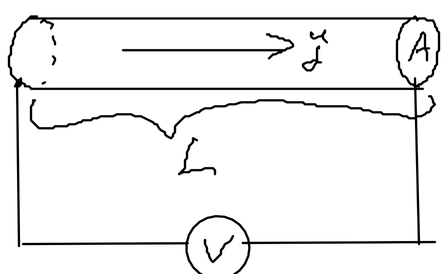
Freies Elektronengas

Das klassische Drude Modell (1900)



- $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$
- keine Elektron-Elektron WW
- mittlere Stoßzeit τ (Relaxationszeit)
- Stoß-Wahrscheinlichkeit in der Zeit dt ist $\frac{dt}{\tau}$

- Elektrische Leitfähigkeit σ (Spezifischer Widerstand ρ)



$$\vec E = \rho \vec j \qquad \vec j = \sigma \vec E$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$|\vec j| = \frac{I}{A} \qquad |\vec E| = \frac{V}{L} \qquad \frac{V}{I} = R = \rho \frac{L}{A}$$

- Stromdichte $\vec j$ (Fluss von Elektronen) $\vec j = -e n \vec v_D$

mittlere Driftgeschwindigkeit $\vec v_D$

BGL $\quad m \frac{d\vec v}{dt} = -e\vec E - m \frac{\vec v_D}{\tau}$

$$\vec v\big|_{t=t_1} = \vec v_0\big|_{t=t_0} - \frac{e\vec E (t_1 - t_0)}{m}$$

$$\vec v_D = \langle \vec v \rangle = \overbrace{\langle \vec v_0 \rangle}^{=0} - \frac{e\vec E \langle t_1 - t_0 \rangle}{m} = -\frac{e\vec E \tau}{m}$$

$$\vec j = \frac{n e^2 \tau}{m} \vec E \qquad \boxed{\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m}} \qquad \tau = \frac{m}{\rho n e^2}$$

- „naive" Prognose

$$a \sim 10^{-10}\,m, \quad \tau \approx \frac{a}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}$$

$$\tau\big|_{300K} \approx 10^{-14}\,s$$

$$Cu\big|_{300}: \quad n \sim 10^{23} \qquad \sigma = 10^5 \frac{1}{\Omega \cdot cm}$$

$$\text{mit} \quad \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \langle v^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \approx 10^5 \frac{m}{s}$$

- Mittlere Weglänge zw. 2 Stößen $l = \frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{\tau} \sim 1 \ldots 10\,Å$ (Drude) bei tiefen Temperaturen ist $\ell \sim 10^6 \ldots 10^8$ Å

Impuls Relaxation

$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{j} = -\frac{ne}{m}\vec{p}$

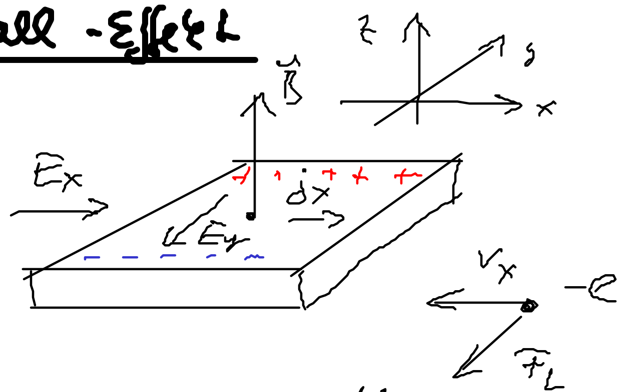
- „kein Stoß"-Wahrscheinlichkeit $\left(1-\frac{dt}{\tau}\right)$

$$\vec{p}(t+dt) = \left(1-\frac{dt}{\tau}\right)\left(\vec{p}(t) + \vec{F}(t)\,dt + \mathcal{O}(dt^2)\right)$$

$$= \vec{p}(t) - \frac{dt}{\tau}p(t) + \vec{F}(t)\,dt + \mathcal{O}(dt^2)$$

$$\lim_{dt\to 0} \vec{p}(t+dt) = \frac{d}{dt}\vec{p}(t) = -\frac{p(t)}{\tau} + \vec{F}(t)$$

Hall-Effekt



$\vec{B} = (0,0,B)$

$$\vec{F} = -e\vec{E} \overbrace{- e\vec{v}\times\vec{B}}^{\vec{F}_L}$$

$$E_y = v_x B = \underbrace{-\frac{1}{en}}j_x B$$

Hall-Konstante $R_H = \omega_c \frac{\tau}{\sigma B}$

$R_H|_{Cu} = -5{,}3 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{C}$ für Ag, Au $\quad R_H > 0$

$R_H|_{Al} = 9{,}9 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{C}$ für Zn $\quad R_H < 0$

Gleichgewichtszustand

$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \qquad 0 = -eE_x - \frac{e}{m}p_y B - \frac{p_x}{\tau}$

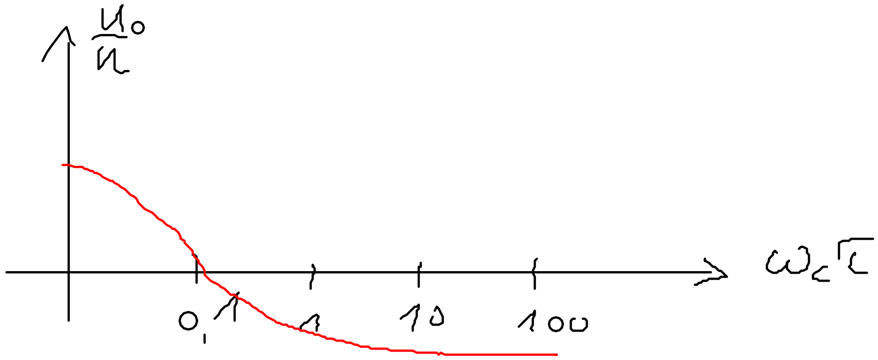
$\qquad\qquad\quad 0 = -eE_y + \frac{e}{m}p_x B - \frac{p_y}{\tau}$

$\Rightarrow \sigma E_x = \omega_c \tau j_y + j_x$

$\qquad \sigma E_y = \omega_c \tau j_x + j_y$

- Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{e}{m}B$

	Rb	Ca	Al
$\frac{n_0}{n}\Big\|_{1\,\text{Tesla}}$	1,0	1,5	-0,3



Wechselstromleitfähigkeit

- Lösungsansatz
$$\vec{E}(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\omega) e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{p}(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{p}(\omega) e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{j}(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{j}(\omega) e^{-i\omega t}\right]$$

- einsetzen in BGL:
$$-i\omega\vec{p} = -\frac{\vec{p}(\omega)}{\tau} - e\vec{E}(\omega)$$
$$\vec{j}(\omega) = -\frac{ne}{m}\vec{p}(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{\vec{E}(\omega)}{\frac{1}{\tau} - i\omega} := \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$$
$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}}$$

- Näherungen: $B(\omega) \approx 0$ mit $\frac{v}{c} \ll 1$, $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} c \gg l$

aus Maxwell-Gleichungen
$$\vec{E} = \vec{E}_0(r) e^{i\omega t}$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}^2\vec{E} = i\omega\,\vec{\nabla}\times\vec{B} = i\omega\mu_0(\sigma\vec{E} - i\omega\varepsilon_0\vec{E})$$
$$-\vec{\nabla}^2\vec{E} = \omega\varepsilon_0\mu_0\,\varepsilon(\omega)\vec{E} \quad \text{mit } \boxed{\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}}$$
$$\boxed{-\vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\vec{E}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Hohe Frequenzen $\omega\tau \gg 1$
$$\sigma(\omega) = \sigma_0\frac{1 + i\omega\tau}{1 + i\omega^2\tau^2} \approx \sigma_0\frac{i}{\omega\tau} \qquad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\tau\omega^2}$$
$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{mit } \omega_p^2 = \frac{ne^2\tau}{m\varepsilon_0\tau}$$
Plasmafrequenz oder Langmuir Frequenz

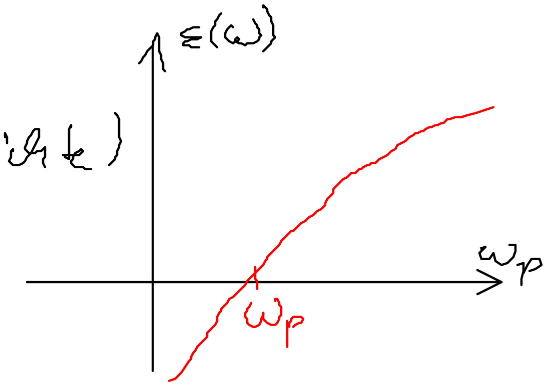
falls $\omega < \omega_p \Rightarrow \varepsilon(\omega) < 0 \Rightarrow \vec{E}$ fällt exp. ab im Mittel

falls $\omega > \omega_p \Rightarrow$ Metall ist „transparent"

Ladungs-Schwingungen

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\varrho}{\partial t} \qquad \varrho(\omega) \sim e^{-i\omega t} \text{ (Ladungsdichte)}$$
$$\sigma(\omega)\varrho(\omega) = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0}\varrho(\omega)$$

- Plasmonen $E_p = \hbar\sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$



- Dispersions relation $\omega = \dfrac{kc}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$