Dozent: Wolfgang Wenzel (wenzel@int.fzk.de)

Transport durch Nanostrukturen

1) endliches System: - diskretes Energiespektrum
   - Quantisierung des Leitwertes
2) Quantenkohärenz: - Transport durch Tunneln
3) Quantisierungseffekte: (Energie, Ladung)
   - Coulombblockade

Klassischer Transport: Leitung im Festkörper

Leitwert $\boxed{G = \frac{I}{U}}$ $\left(\frac{\text{Strom}}{\text{Spannung}}\right)$ Ohmsches Gesetz: $\boxed{G = \sigma \frac{W}{L}}$ ← Breite, ← Länge

spezifischer Leitwert

Wir betrachten einen Leiter (Quantensystem) $L \ll l_0$ (mittlere freie Weglänge)

Ortsraum

Lösungen der Schrödingergl.:
Separation der Variablen in
$(x_\parallel, x_\perp)$ → begrenzende Potential $V(x_\perp)$
→ freie Teilchen kein Potential

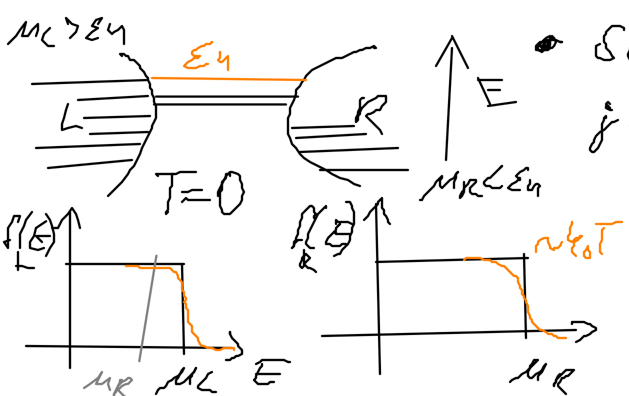
$$\boxed{(x_\parallel, x_\perp) = e^{ikx} \chi_n(x_\perp)}$$

→ n-te Eigenfkt der Lösung der 1-dim Schrödingergl. in $V(x_\perp)$

$|n, k\sigma\rangle = \Psi_{nk\sigma}$
→ Spin
→ Wellenvektor in $x_\parallel$
→ Quantenzahl in $x_\perp$

$$\boxed{E_{nk\sigma} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \varepsilon_n}$$

- Elektronen mit $k > 0$ laufen von rechts nach links
- Elektronen mit $k < 0$ laufen von links nach rechts



- Strom eines Zustandes

$$j = \frac{\hbar}{i}\left[\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right]$$
$$= e v_k \left[f_L(E_{kn}) - f_R(E_{kn})\right]$$

$$I = 2 \sum_k \sum_n j_{kn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk$$

Spin

$$\boxed{V(x,y,z) = V_x(x)\,V_y(y)\,V_z(z) \quad \text{und} \quad \Psi(x,y,z) = \Psi_{n_1}(x)\,\Psi_{n_2}(y)\,\Psi_{n_2}(z)}$$
(wie bei 3-d H.O) hier $x_\parallel = z$

$$I = 2e \int \frac{dk}{2\pi} v_k \sum_n \left[f_L(E_{kn}) - f_R(E_{kn}) \right]$$
$$= 2e \int \frac{dk}{2\pi} \frac{\partial E_{nk}}{\partial(\hbar k)} \sum_{n=0} \left[f_L\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon_n\right) - f_R\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon_n\right) \right]$$
$$= 2e \int \frac{dE}{2\pi\hbar} \sum \left[f_L(E+\varepsilon_n) - f_R(E+\varepsilon_n) \right]$$

mit $f(E) = \dfrac{1}{1+\exp[\beta(E-\mu)]}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial E} = -\dfrac{\partial f}{\partial E}$ $\quad f$: Fermifunktion

$$\boxed{I = \frac{2e}{h} \underbrace{(\mu_L - \mu_R)}_{U} \underbrace{\int_0 dE \sum_n \frac{\partial f}{\partial \mu}(E+\varepsilon_n)}_{\text{hängt vom Quantensystem ab}}}$$

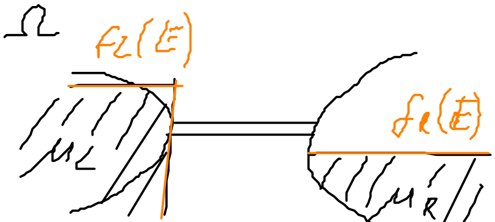
$\Rightarrow$ Strom fließt für jedes n, sodass $\mu_L > \varepsilon_n > \mu_R$
mit dem Beitrag $\dfrac{2e}{2\pi\hbar}$ $\quad$ Quantisierung
für $\mu_L < \varepsilon_n < \mu_R$ $\quad$ Beitrag $-\dfrac{2e}{2\pi\hbar}$

$\Rightarrow$ der Strom ist quantisiert:
$\dfrac{2e^2}{h} M(E_F)$ $\quad$ Anzahl der Niveaus zwischen μ_L und μ_R

$\Rightarrow$ Strom ist unabhängig von L $\hat{=}$ ballistischer Transport

$\Rightarrow$ wenn $|\mu_L - \mu_R| < \varepsilon_0$, fließt kein Strom
nun Widerstand: Kontaktwiderstand

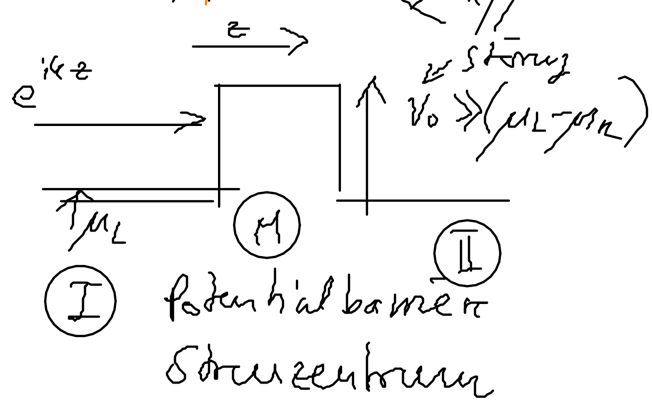
Leitwertquantum $\dfrac{2e^2}{h} \simeq 25\,k\Omega$



$$\boxed{I = \frac{2e^2}{h} \int dE \left[f_L(E) - f_R(E) \right] t(E)}$$

Ansatz:

$\Psi_I = 1\, e^{ikz} + r\, e^{-ikz}$
$\Psi_{II} = t\, e^{ikz}$



Strom $j(x) = \dfrac{e}{2m} \left(\Psi \hat{p} \Psi^* + \Psi^* \hat{p} \Psi \right)$
$j_{II} = e\, v_F\, |t_k|^2$

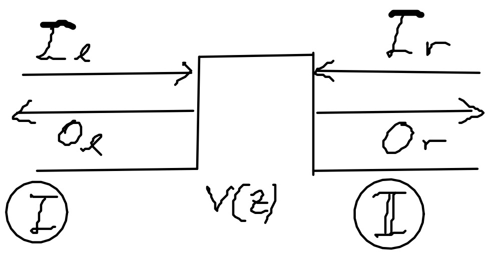
$t(E) = |t_k|^2$ Transmissionsfunktion $T(I)$

- Für ein nicht ideales System mit Streuzentren wird das volle Leitwertquantum G_0 nicht erreicht!

Verallgemeinerung auf viele Kanäle:

$$\boxed{T(I) = \sum_n |t_{nk}|^2}$$

einzelne Barriere:



$$\Psi_I = I_l e^{ikz} + O_l e^{-ikz}$$
$$\Psi_{II} = I_r e^{-ikz} + O_l e^{ikz}$$

Streumatrix: $\begin{pmatrix} O_l \\ O_r \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} I_l \\ I_r \end{pmatrix}$

Reflexionskoeff

$$\boxed{S = \begin{pmatrix} r_l & t_{lr} \\ t_{rl} & r_r \end{pmatrix}}$$ Transmissionskoeff

$SS^+ = 1$ (Teilchenzahlerhaltung)

$S^+ = S^* = S^{-1}$ (Zeitumkehr)

Transmissionsmatrix:

$$\begin{pmatrix} I_l \\ O_l \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} I_r \\ O_r \end{pmatrix} \qquad \boxed{M = \begin{pmatrix} t_{rl}^{-1} & -t_{rl}^{-1} r_r \\ r_l t_{rl}^{-1} & t_{lr}^{-1} \end{pmatrix}}$$

$$M_{12} = M_1 M_2$$
$$t_{12} = t_1^{-1} t_2^{-1} - t_1^{-1} r_1 r_2 t_2^{-1} \quad \text{(symmetrische Barriere)}$$
$$= t_1^{-1}(1 - r_1 r_2) t_2^{-1} \qquad t_{rl} = t_{rl}$$

$$\boxed{T_{12} = |t_{12}|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2}\cos\vartheta + R_1 R_2}}$$

$$r_1 r_2 = \sqrt{R_1 R_2}\, e^{i\vartheta}$$

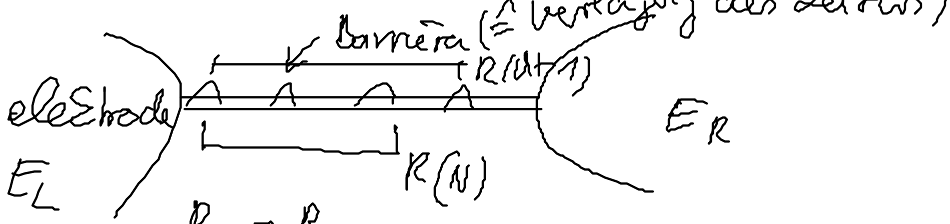
$R_1 = |r_1|$

Phase ϑ

$R_2 = |r_2|$

$$T_{12} = 1 - R_{12}$$

Betrachte: $R_{12} = \dfrac{R_{12}}{T_{12}} = R_1 + R_2 + 2R_1R_2 - 2\sqrt{\dfrac{R_1 R_2}{T_1 T_2}}\cos\vartheta$



$R_2 = R_1$

$\cos\vartheta$ hängt ab vom Ort

$\langle R_{12}\rangle \sim R_1 + R_2 + 2R_1R_2$

$R(N+1) = R(N) + \delta R + 2R(N)\delta R$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta R}{\Delta L} = \frac{1}{L_0}\left(1 + 2(L)\right) = \frac{dR}{dL}$$

Mittlerer Abstand der Barrieren

$$\boxed{R(L) = \frac{1}{2}\left(\exp\left[\frac{2L}{L_0}\right] - 1\right)} \longrightarrow \infty \quad \text{für } L \gg L_0$$