Boltzmann

Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$

Gleichgewicht $f^0(\cdots) = \dfrac{1}{\exp\left(\frac{E_p - \mu}{k_B T}\right) - 1}$

El.-Dichte $n(\vec{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}\sigma} f(\vec{r}, \vec{p}, t)$

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}\sigma} e\, \vec{v}_{\vec{p}}\, f(\cdots) \quad (\vec{v}_p = \nabla_{\vec{p}} \varepsilon_{\vec{p}})$

Spin

Gruppengeschw.

Boltzm.-Gl.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e\vec{E}\,\nabla_{\vec{p}} + \frac{\vec{p}}{m}\nabla_{\vec{r}}\right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{p}}\,\nabla_{\vec{p}} + \dot{\vec{r}}\,\nabla_{\vec{r}}\right)$$

Beispiel Störstellenstr.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f\right)_{imp} = -\frac{1}{\tau_{imp}}\left[f(\cdots) - \langle f(\cdots)\rangle\right]$$

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{p}}$$

Winkelmittelung

elastische Streuung an statischen Störstellen, S-Wellenstreuung

Boltzmannverteilung

für Metalle $k_B T \ll E_F$

Relaxationsapproximation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{1}{\tau}\,\delta f \qquad \delta f = f - f^0$$

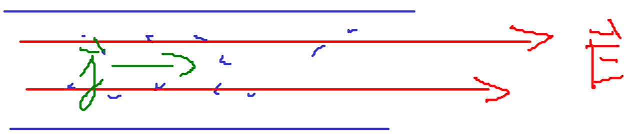
Relaxiert zum Mittelwert

vereinfachtes Problem

aber es bleibt zu prüfen, ob die Näherung ausreicht
(z.B. Erhaltungssätze müssen erfüllt bleiben)

Beispiel: – homogenes el. Feld
– stationäre Lösung, räumlich konstant

$$f^0 = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_p-\varepsilon_F}{kT}\right)+1} \qquad \delta f = f - f^0$$



$$\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t}} + e\vec{E}\,\nabla_p + \cancel{\frac{\vec{p}}{m}\nabla_r}\right)(f_0+\delta f) = -\frac{1}{\tau_{imp}}\,\delta f$$

zeitl. konstantes f

Räumlich konstant

Bem. Für S-Wellenstreuung reduziert sich Stoßintegral auf Relaxationsansatz

Entwickle $\delta f \ll f_0$

$$\Rightarrow \qquad \delta f = -\tau_{imp}\, e\vec{E}\cdot\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}\,\underbrace{\nabla_p \varepsilon}_{\text{Gruppengeschwind.}}$$

$$= -\tau_{imp}\, e\vec{E}\cdot\vec{v}_p\,\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}$$

$$-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{4k_BT\cosh^2\underbrace{\frac{\varepsilon}{2k_BT}}_{?}} \approx \delta(\varepsilon-\varepsilon_F)$$

$k_BT \ll \varepsilon_F$

$$\int_0^\infty d\varepsilon\left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}\right) = 1$$

Stromdichte
$$\vec{j} = \frac{e}{V}\sum_{\vec{p}\sigma}\vec{v}_p\,\delta f$$

$$= -\tau_{imp}\frac{2e^2}{V}\sum_{\vec{p}}\vec{v}_p\,(\vec{v}_p\vec{E})\,\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_p \; \vec{p}\,(\vec{p}\,\vec{E}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} p_z E$$

$\vec{E}$ in z-Richt.

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{p^2 E}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int d\varphi\, \cos^2\theta$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{p^2 E}{2}\underbrace{\int_{-1}^{1} d\cos\theta\, \cos^2\theta}_{\frac{2}{3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3} E\, p^2$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -\tau_{imp}\, 2 e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, \vec{v}_p (\vec{v}_p \vec{E}) \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}$$

$$= -\tau_{imp}\, 2 e^2 \int d\varepsilon\, N(\varepsilon)\, \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_p\, \vec{v}_p (\vec{v}_p E)\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}$$

$$= \tau_{imp}\, 2 e^2 \int d\varepsilon\, N(\varepsilon)\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)\, \frac{1}{3} \underset{v(\varepsilon)}{v^2}\, \vec{E}$$

(Zustandsdichte verwenden)

$$= \tau_{imp} \frac{2}{3} e^2\, v_F^2\, N(\varepsilon_F)\, \vec{E}$$

Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{2 e^2 \tau_{imp}}{3} v_F^2\, N(\varepsilon_F)$$

$$= 2 e^2\, N(\varepsilon_F)\, D$$

Diffusionskonstante

$$D = \frac{v_F^2\, \tau_{imp}}{3}$$

für $d = 3$ ist

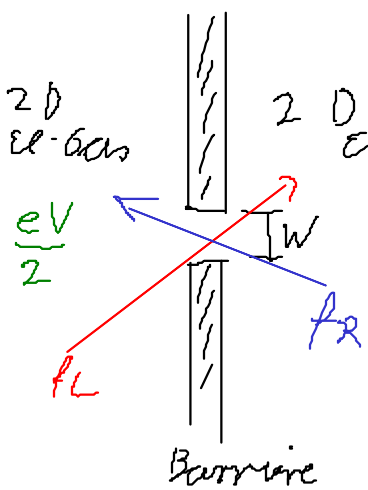
$$N(\varepsilon_F) = \frac{m\, p_F}{2\pi^2 \hbar^3} \qquad n = \frac{4\pi}{3} p_F^3 \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau_{imp}}{m}$$

(entspricht Drude-Modell)

1.6 Leitwert eines Punktkontaktes

in 2 (oder 3) Dimensionen



rechts und links "Reservoire"

mit $V_{L,R} = \pm \frac{V}{2}$

$$f_L(\varepsilon) = f^0\left(\varepsilon_p - \frac{eV}{2}\right) \; ; \; f_R = f^0\left(\varepsilon_p + \frac{eV}{2}\right)$$

2 Dim.
$$\vec{I} = \underbrace{2}_{\text{Spin}} eW\left(\sum_{\substack{\vec{p} \\ p_z>0}} v_p \cdot f_L(\varepsilon) - \sum_{\substack{\vec{p} \\ p_z<0}} \vec{v}_p \, f_R(\varepsilon)\right)$$

Strom der Elektronen von links durch Kontakt

Strom von rechts

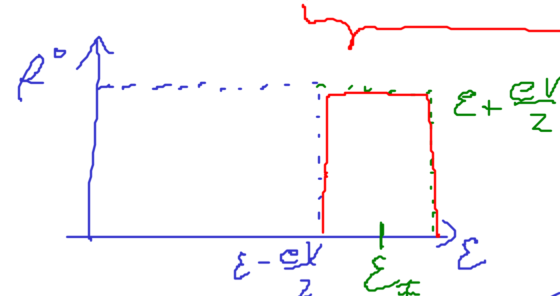
$$\vec{I} = W j = 2e\frac{W}{A}\sum_p \dots \quad \Rightarrow \text{daher } W$$

$$= 2eW \int_{p_z>0} \frac{dp^2}{(2\pi\hbar)^2}\vec{v}_p f_L - \int_{p_z<0} \frac{dp^2}{(2\pi\hbar)^2}\vec{v}_p f_R$$

$$= 2eW \int d\varepsilon\, N^{2d}(\varepsilon)\, v_p \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2\pi}\cos\theta \left[f^0\left(\varepsilon - \frac{eV}{2}\right) - f^0\left(\varepsilon + \frac{eV}{2}\right)\right]$$

2π von $p_z < 0$ oder $p_z > 0$

$$I_z = \frac{2eW}{2\pi}\, 2\int d\varepsilon\, v\, N^{2d}(\varepsilon)\left[f^0\left(\varepsilon - \frac{eV}{2}\right) - f^0\left(\varepsilon + \frac{eV}{2}\right)\right]$$



$$= \frac{2eW}{\pi} v_F N^{2d}(\varepsilon_F) \cdot eV = \underbrace{G}_{\text{Leitwert}} \cdot V$$

$$G^{2d} = \frac{2e^2 W}{\pi} v_F N^{2d}(E_F)$$

$$N^{2d}(E_F) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$$

$$G^{2d} = \frac{2e^2}{\pi} W \frac{\hbar k_F}{2\pi\hbar^2} = \frac{W k_F}{\pi}\,\frac{2e^2}{h}$$

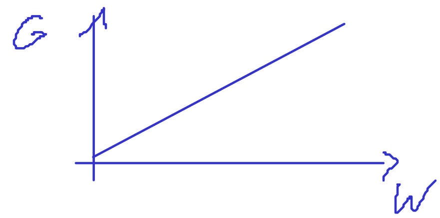
$h = 2\pi\hbar$

Geometriefaktor

$$R_k = \frac{h}{e^2}$$

$R_k = 25{,}8\ldots\ k\Omega$ **Widerstandsquantum**

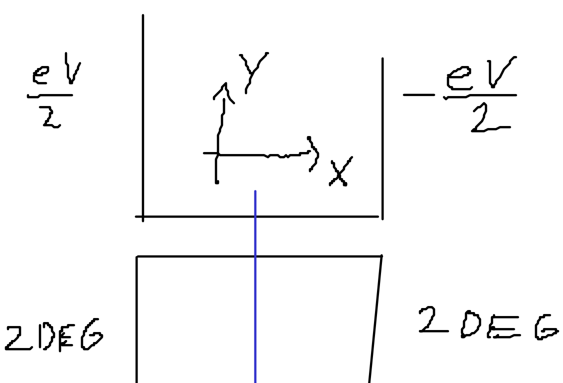
bekannt durch Quantenhalleffekt (von Klitzing)



für 3D

$$G^{3d} \propto A\, k_F^2\; 2\,\frac{1}{R_K}$$

1.7 Eindimensionaler Leiter zw. Reservoir



$$\Psi(\vec r) = \varphi_0(z)\,\chi_0(Y)\,e^{ikx}$$

$$I = 2e\left(\sum_{p>0} v_p f_L(\varepsilon_p) - \sum_{p<0} v_p f_R(\varepsilon_p)\right)$$

$$= \frac{2e}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, N^{(1d)}(\varepsilon)\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\left[f^0\!\left(\varepsilon-\frac{eV}{2}\right) - f^0\!\left(\varepsilon+\frac{eV}{2}\right)\right]$$

$$N^{1d}(\varepsilon) = \frac{2}{2\pi\hbar} \quad \frac{1}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}} = \frac{1}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}$$

$$I = \frac{e}{\pi\hbar} \int d\varepsilon \, \frac{1}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}} \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial p} \left[f^0\left(\varepsilon - \frac{eV}{2}\right) - f^0\left(\varepsilon + \frac{eV}{2}\right) \right]$$

Zustandsdichte · Gruppengeschwind. = const

$$= \frac{e^2}{\pi\hbar} V = 2 \frac{e^2}{h} V = 2 \frac{1}{R_K} V$$

Spin (von Anfang)

$$G = \frac{2}{R_K}$$ Leitwert quantisiert