Hall-Effekt

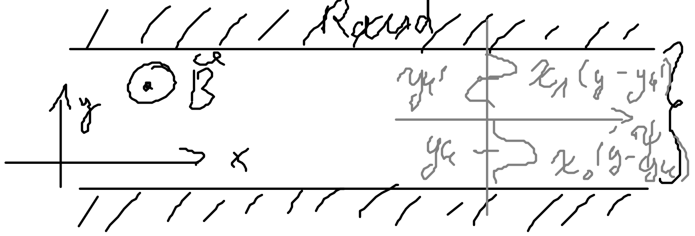
$$R_H = \frac{V_H}{I_x} = \frac{B}{q n^{2d} c} \qquad R_{HW} = \rho_H \qquad \omega_c = \frac{|q| B}{mc}$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \qquad \rho_{xy} = \rho_H \qquad \rho_{xx} \hat{=} \text{Transportwiderstand}$$

$$\hat{\rho}^{-1} = \sigma \qquad \text{für } \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = 0 \quad \text{für } \rho_{xy} \neq 0$$

4.2 Landau Niveaus

4.2.1 Lösung der Schrödinger Gleichung



geladenes Teilchen im $\vec{B}$-Feld

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + V(y)$$

$$\text{z.B.: } V(y) = \begin{cases} 0 & |y| < \frac{w}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- wähle Eichung $\vec{A} = (-By, 0, 0) \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{A} = (0, 0, B)$ ✓

$$H = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{q}{c}By\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right) + V(y)$$

- Ansatz $\psi_{nk}(x,y) = e^{ikx}\chi_{nk}(y)$
- innerhalb der Probe $V(y) = 0$

$$\left(\frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{m}{2}\omega_c^2(y - y_k)^2\right)\chi_{nk}(y) = E_{nk}\chi_{nk}(x)$$

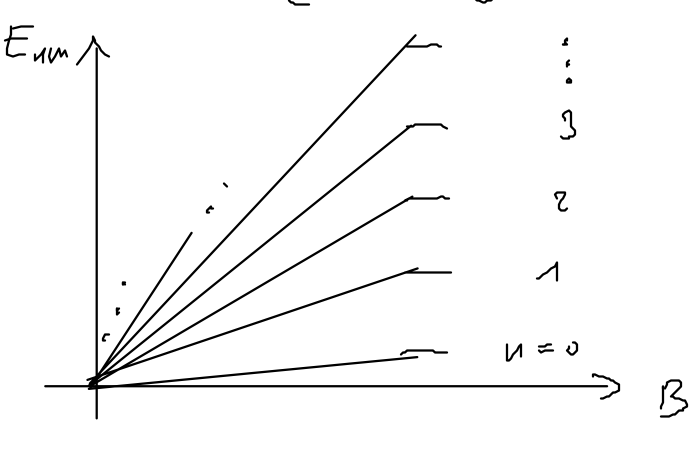
mit $y_k = \frac{\hbar k c}{|e| B}$ mit $q = -|e|$ (Elektronen)

$\hat{=}$ verschobener 1d harmonischer Oszillator

$E_{nk} = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$ unabhängig von k

Eigenfkt: $\chi_{nk}(y) = \phi_n(y - y_k) \qquad \phi_n(y) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{l_c}\right)^2} H_n\left(\frac{y}{l_c}\right)$

- $l_c = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ Längenskala



- typische B-Werte im Bereich von 0 bis 25 Tesla

4.2.2 Entartung der Landau Niveaus

Erlaubte Werte von k:

1) setze System in Kasten L_x, periodische Randbed.

$\Rightarrow k = \frac{2\pi}{L_x} n_k \qquad n_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) y_k muss innerhalb der Probe liegen: $|y_k| \leq \frac{w}{2}$

genau am Rand zunächst vernachlässigbar weil $l_c \ll w$

$$n_k = \frac{L_x}{2\pi} k = \frac{L_x}{2\pi} \frac{|e| B}{\hbar c} y_k \qquad |n_k| \leq \frac{L_x}{2\pi} w \frac{|e|B}{\hbar c} \frac{1}{2} = \frac{F B}{\frac{\hbar c}{|e|}} \frac{1}{2}$$

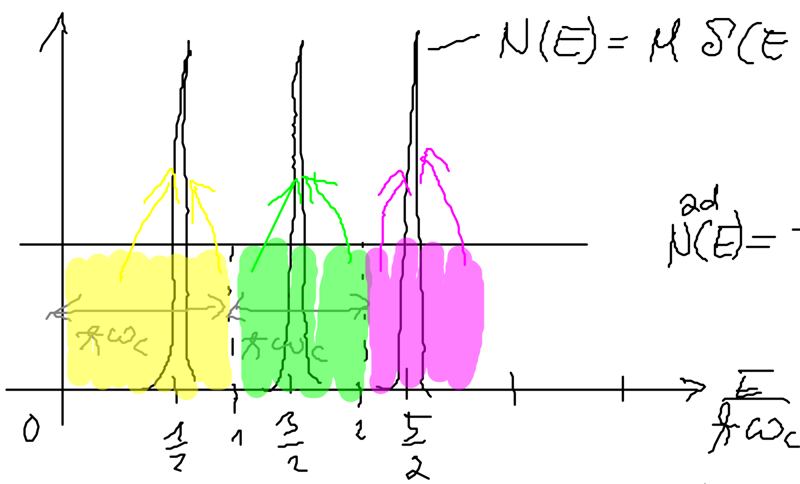
$\Rightarrow$ Zahl M der möglichen k-Werte = Entartung

$$M = \frac{F B}{\frac{\hbar c}{|e|}}$$

- magnetischer Fluss durch die Probe $\phi = F B$
- Flussquant $\phi_0 = \frac{hc}{|e|}$

$\Rightarrow M = \frac{\phi}{\phi_0}$ = Zahl der Flussquanten durch die Probe

Zustandsdichte



$$N^{(2d)}(E) = \frac{m F}{2\pi\hbar^2}$$

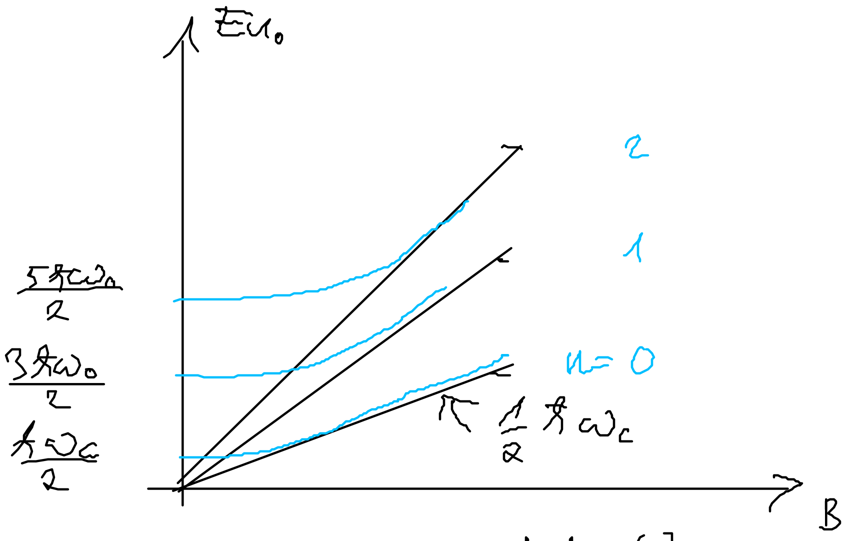
$$N^{(2d)} \cdot \hbar\omega_c = \frac{m F}{2\pi\hbar^2} \hbar \frac{|e|B}{m c} = \frac{\phi}{\phi_0} = M$$

4.2.3 Einfluss des Randes

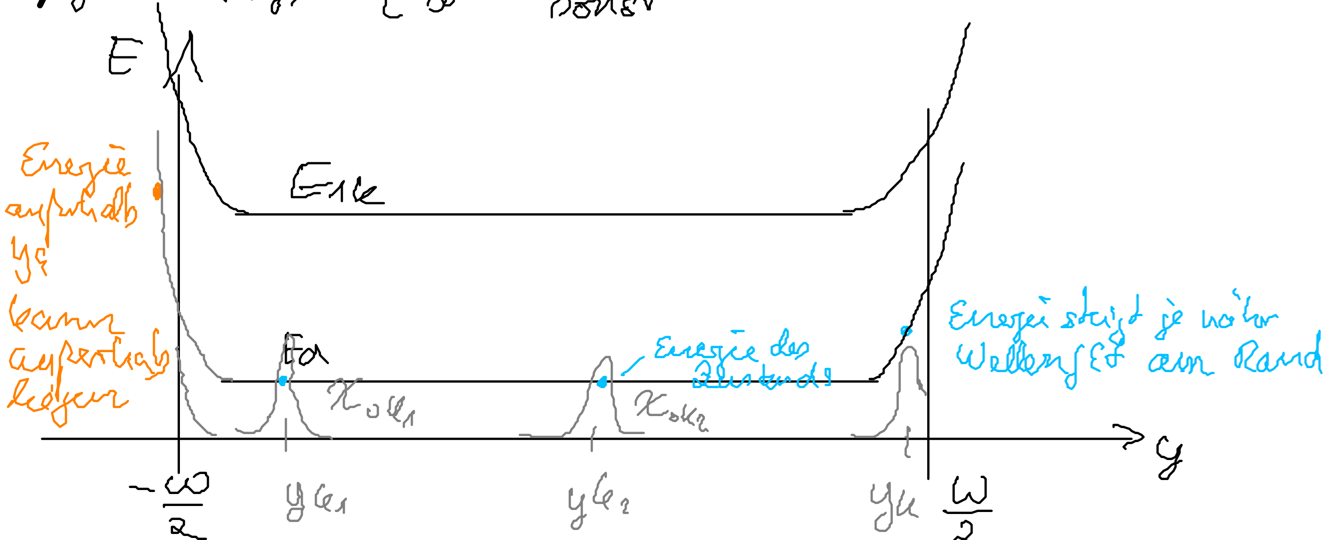
a) für $V(y) = \frac{m}{2} \omega_0^2 y^2$

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2} (\omega_0^2 + \omega_c^2)(y - \tilde{y}_k)^2 + \frac{m}{2} \frac{\omega_0^2 \omega_c^2}{\omega_0^2 + \omega_c^2} y_k^2 \; ; \; \tilde{y}_k = y \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2 + \omega_c^2}$$

$$\Rightarrow E_{nk} = (n + \tfrac{1}{2}) \hbar \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_c^2}$$



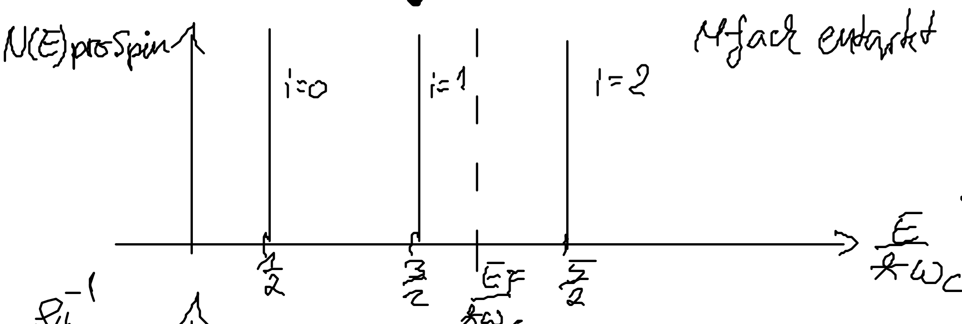
b) für $V(y) = \begin{cases} 0 & |y| \le \frac{W}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$



- Landau Niveaus werden am Rand nach oben gebogen gezeichnet als Fkt von $y_k \propto k$. Beachte $|y_k| \geq \frac{W}{2}$ ist möglich, weil dann y_k nicht „Schwerpunkt" der Wellenfkt ist.

4.3 Quanten-Hall-Effekt

4.3.1 (Zu) einfaches Bild

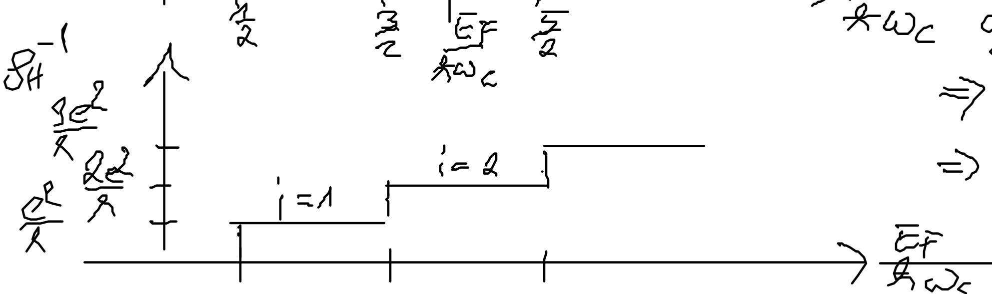


M fach entartet

- Angenommen wir kontrollieren E_F
- $i = \mathrm{Int}\left(\frac{E_F}{\hbar\omega_c} + \frac{1}{2}\right)$ gefüllte Bänder

$\Rightarrow N = M \cdot i$ Elektronen pro Spin

$\Rightarrow \rho_H = \frac{B}{n^{2d}|e|c} = \frac{B}{|e|c} \frac{1}{\frac{N}{F}}$



$$\Rightarrow \rho_H = \frac{B}{|e|c}\,\frac{F}{N i} = \frac{B}{|e|c}\,\frac{\phi_0 F}{B F}\,\frac{1}{i} = \frac{h}{e^2}\,\frac{1}{i}$$

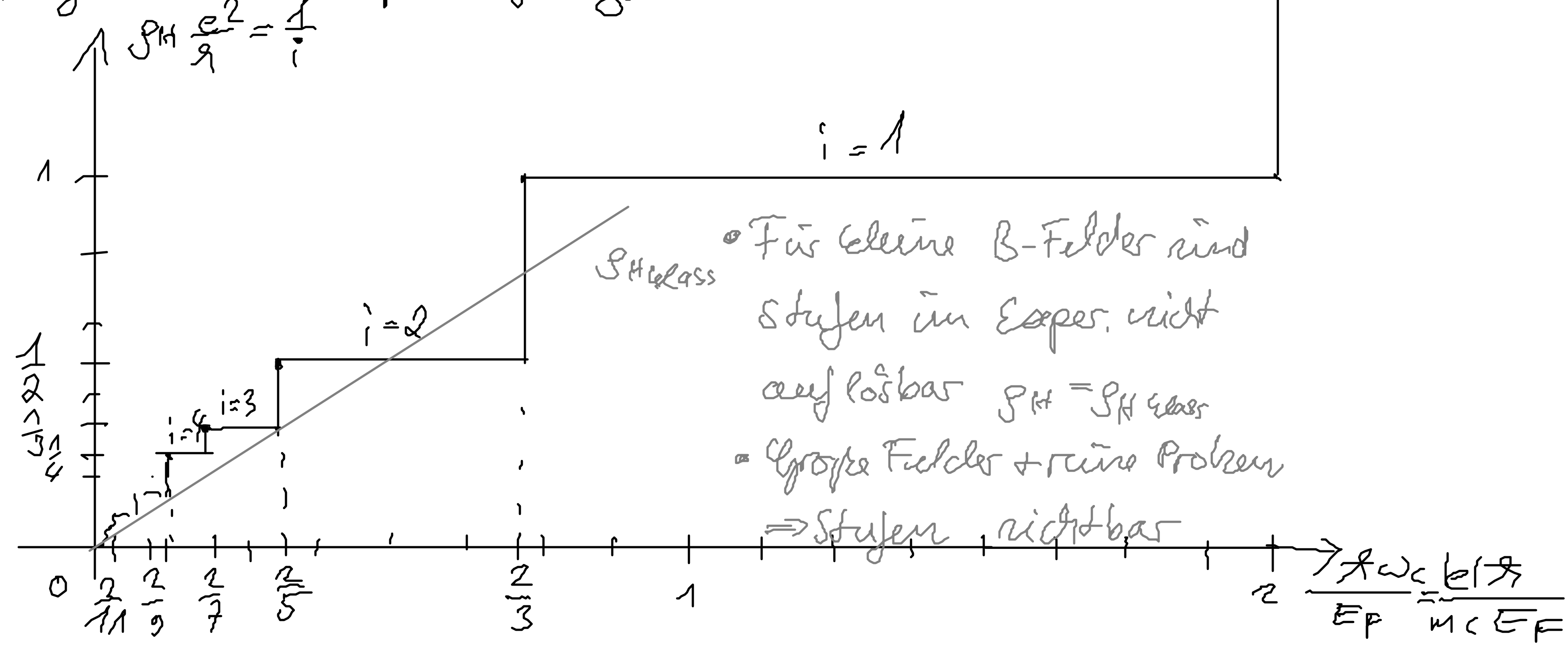
$$\rho_H^{-1} = \frac{e^2}{h}\, i \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

- (Hall-Widerstand)$^{-1}$ ist quantisiert in Einheiten von $\frac{e^2}{h}$
  Mit Spin wird es $\frac{2e^2}{h}$
- $\frac{h}{e^2} = R_K = 25{,}8\,k\Omega$

- Quantisierung $\Leftrightarrow$ Bänder ganz voll oder leer

Im Experiment wird B verändert $\Rightarrow \omega_c$ und N ändern sich

Angenommen E_F sei festgehalten



- Stufen bei $\frac{E_F}{\hbar\omega_c}$ = integer $-\frac{1}{2}$

Kritik:

1) Im Experiment bleibt nicht E_F sondern die Zahl der Elektronen n^{2d} ungefähr konstant. Wenn wir B bei festem n^{2d} variieren
$\Rightarrow$ es gibt auch partiell gefüllte Landau Niveaus und Quantisierung von ρ_H verschwindet

2) Im Exp. haben die Stufen endl. Breite und gleichzeitig ist ρ_{xx} groß