P1-12,22 AUSWERTUNG VERSUCH RESONANZ

GRUPPE 19 - SASKIA MEISSNER, ARNOLD SEILER

0.1. **Drehpendel - Harmonischer Oszillator.** Bei dem Drehpendel handelt es sich um einen harmonischen Oszillator.

Das Trägheitsmoment, das rücktreibende Drehmoment der Feder und das Drehmoment der Dämpfung summieren sich zu Null:

$$\Theta\ddot{\phi} + \gamma\dot{\phi} + D^*\phi = 0$$

Mit dem Trägheitsmoment des Rades Θ *, der Federkonstanten* D^* *(Drehmoment) und der Dämpfungskonstanten* γ *.*

Die Gleichung lässt sich mit $\omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}$ und $\beta = \frac{\gamma}{2\cdot\Theta}$ auf die bekannte Form bringen:

$$\ddot{\phi} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{\phi} + \omega_0^2 \cdot \phi = 0$$

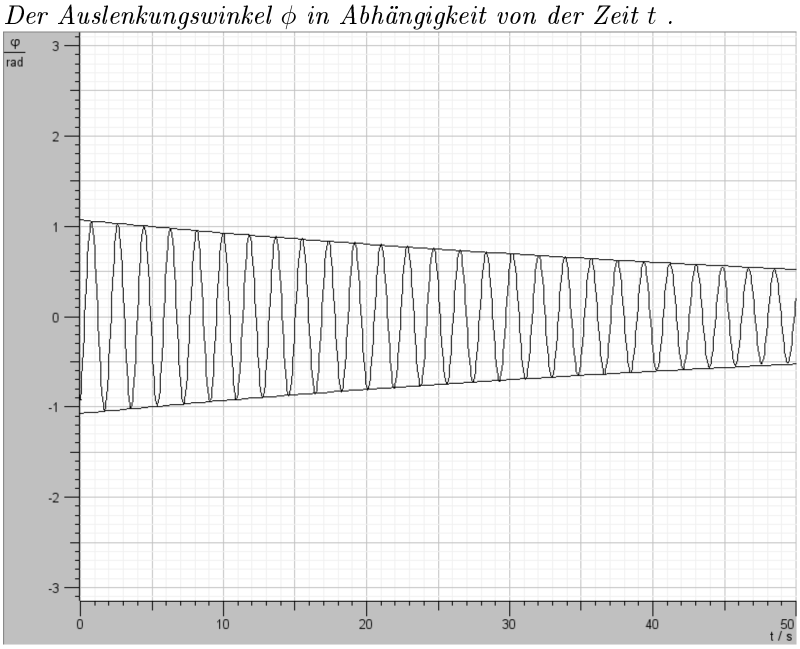
Für die Lösung unterscheidet man zwischen

- Schwacher Dämpfung $\beta < \omega_0$
  - $\phi(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot cos(\omega \cdot t + \psi)$
- Aperiodischer Grenzfall $\beta = \omega_0$
  - $\phi(t) = A \cdot (1 + B \cdot t) \cdot e^{-\beta t}$
- Kriechfall $\beta > \omega_0$
  - $\phi(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot cosh(\omega \cdot t)$

1. Drehpendel, freie Schwingungen

Ein Drehpendel (Pohlsches Rad) wird ausgelenkt und Schwingen gelassen. Mit CASSY wurde die Auslenkung des Drehpendels gemessen.

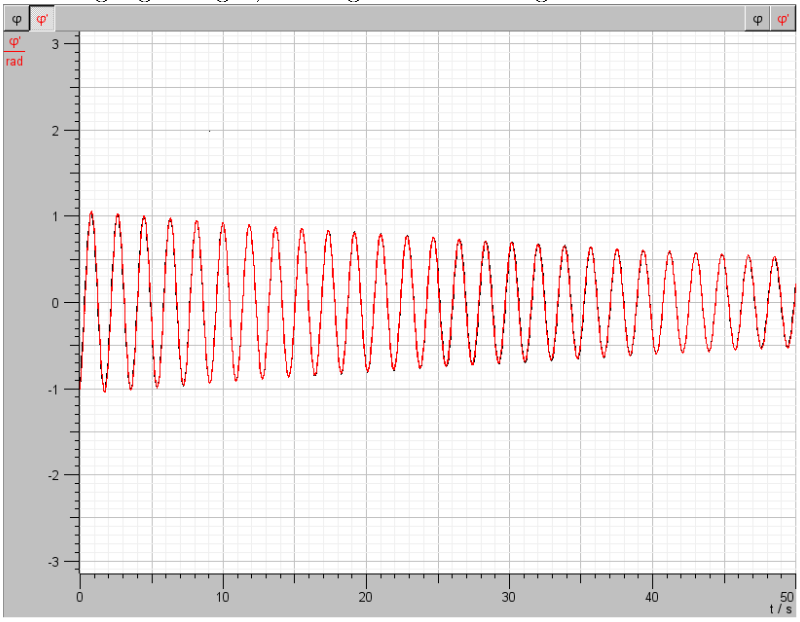
Der Auslenkungswinkel ϕ *in Abhängigkeit von der Zeit* t *.*



Die Einhüllende über die maximalen Auslenkungen lieftert die Werte für den Dämpfungsterm. Mit CASSY berechnet.

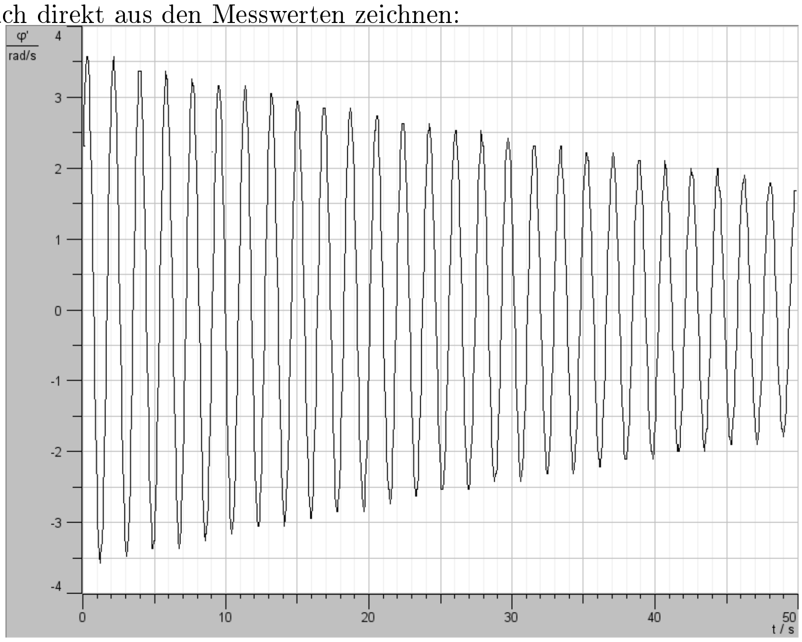
Die Schwingung ist leicht gedämpft, es handelt sich um eine exponentielle Dämpfung. Die Parameter der Dämpfung wurden mit Hilfe von CASSY (Anpassung -> Einhüllende) berechnet: $A \cdot e^{-\frac{1}{B}t} + C = 1,071 \cdot e^{-\frac{1}{69,92s}t} - 0,002$.

Diese Werte lassen sich in die Schwingungsgleichung für ϕ einsetzten. Passt man die Periodendauer von Hand an und lässt CASSY die Phasenverschiebung ausrechnen, erhält man $\phi(t) = 1,071 \cdot e^{-\frac{1}{69,92s}t} \cdot cos(\frac{2 \cdot \pi}{1,836s} \cdot t + 5,136)$. Dies beschreibt die Schwingung sehr gut, wie folgende Grafik zeigt.

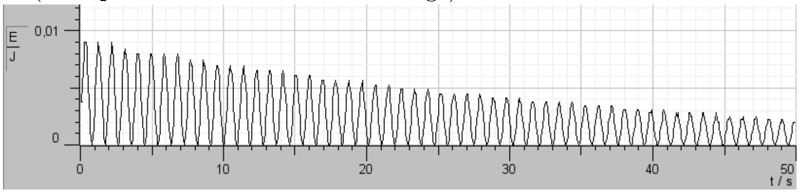


Die rote Kurve ist obige Funktion, die schwarze darunter die gemessene Schwingung.

Für die Winkelgeschwindigkeit leitet man obige Funktion ab, CASSY kann dies auch direkt aus den Messwerten zeichnen:

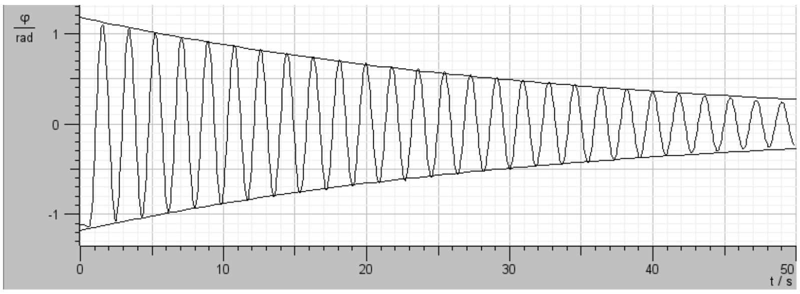


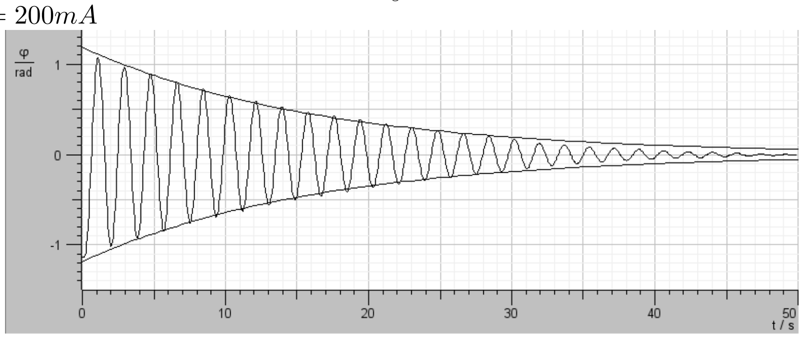
Die Energie berechnet man durch $E = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \cdot \Theta$, wobei das Trägheitsmoment $\Theta = 1,4 \cdot 10^{-3} \cdot kg \cdot m^2$ des Pendels nur durch die Masse des Ringes abgeschätzt wird (die Speichen werden vernachlässigt).



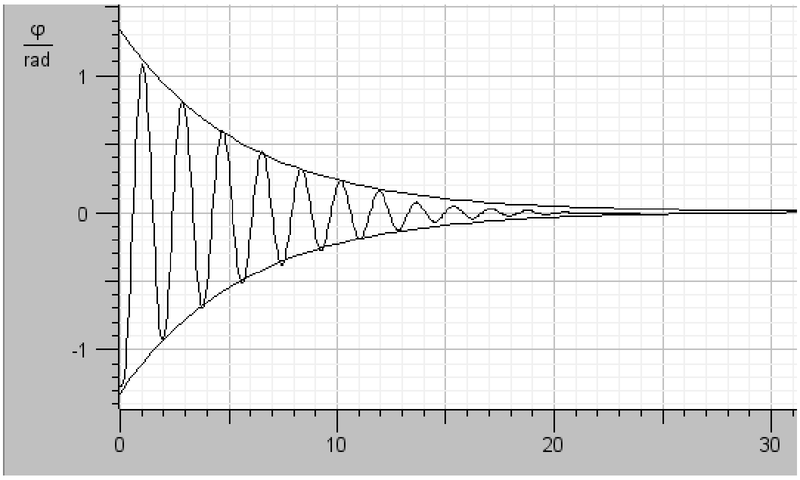
2. Drehpendel, freie Schwingungen

Das Pendel wird nun mit einer Wirbelstrombremse gedämpft. Die folgenden Grafiken zeigen die Messwerte bei den verschiedenen Dämpfungen und die Einhüllende, aus der die Dämpfungskonstante β abgelesen werden kann. Des weiteren lässt sich aus den Messwerten das Dämpfungsverhältnis k mit der Formel $k = \sqrt[n]{\frac{\phi_0}{\phi_n}}$ berechnen (der einfacheren Rechnung wegen nicht $k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_{i-1}}{\phi_i}$). Aus k lässt sich dann ebenfalls die Dämpfungskonstante berechnen: $\beta = \frac{ln(k)}{T}$.

- $I_B = 100mA$
  - 

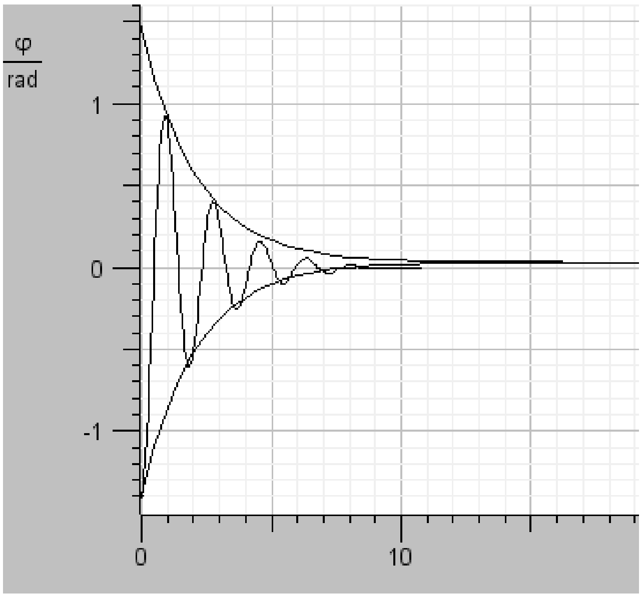
  - $\beta = \frac{1}{34,04s} = 0,029\frac{1}{s}$, $A = 1,178$
  - Errechnet: $k = 1.058$, $\beta = 0,030\frac{1}{s}$
- $I_B = 200mA$
  - 

  - $\beta = \frac{1}{16,39s} = 0,061\frac{1}{s}$, $A = 1,187$
  - Errechnet: $k = 1.118$, $\beta = 0,061\frac{1}{s}$
- $I_B = 400mA$

- 

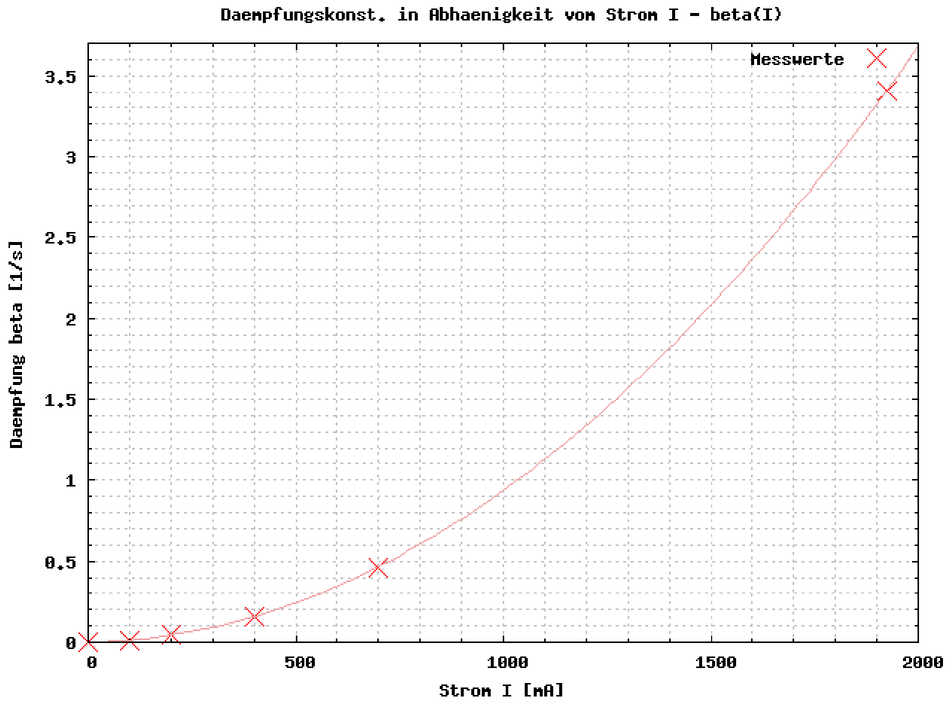
- $\beta = \frac{1}{5{,}75s} = 0,174\frac{1}{s}$, $A = 1,322$
- Errechnet: $k = 1.378$, $\beta = 0,174\frac{1}{s}$

• $I_B = 700mA$

- 

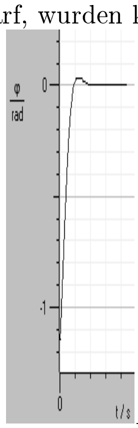
- $\beta = \frac{1}{2{,}12s} = 0,472\frac{1}{s}$, $A = 1,417$
- Errechnet: $k = 2,450$, $\beta = 0,484\frac{1}{s}$

Die Dämpfungskonstante β kann nun in Abhängigkeit vom Strom durch die Wirbelstrombremse dargestellt werden. Hierzu muss jedoch die Dämpfung ohne Strom abgezogen werden: $\beta_{korr}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$.



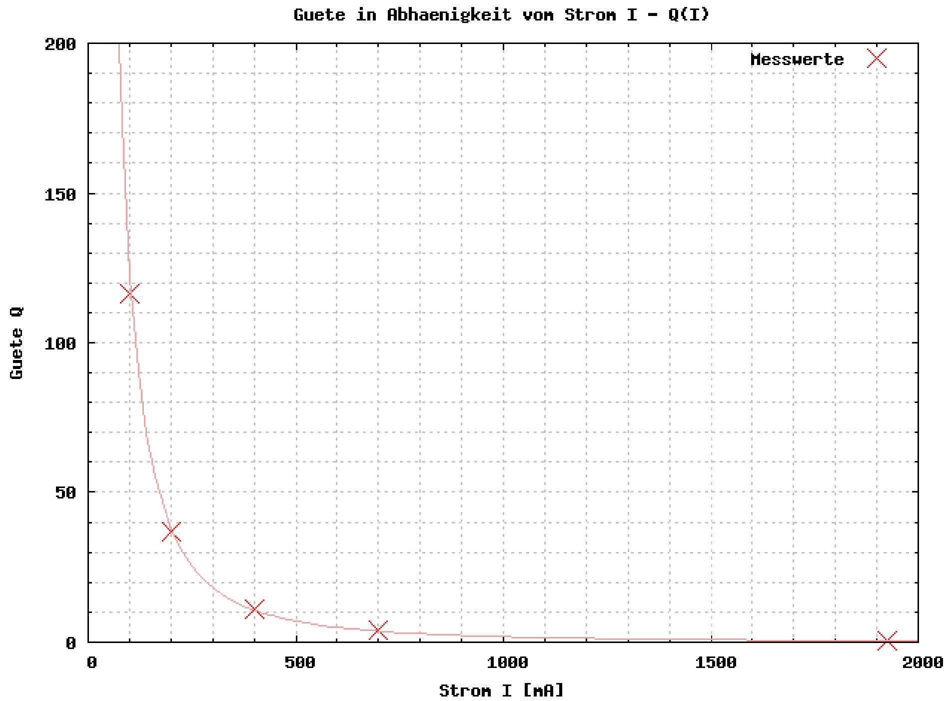
Ausgleichskurve: $\beta(I_B) = (9,5 \cdot 10^4 \cdot I + 163mA)^2$

Der Strom für die Grenzdämpfung lässt sich aus den Messwerten extrapolieren. Für die Grenzdämpfung, die für $\beta = \omega_0 = 3,42\frac{1}{s}$ eintritt, muss ein Strom $I_B = 1,9A$ fließen. Experimentell stellt man bei $I_B = 1,7A$ noch ein leichtes Durchschwingen fest, da die Spule laut Versuchsbeschreibung jedoch nur bis zu 1,6A belastet werden darf, wurden keine weiteren Messwerte ermittelt.



Ausschlag bei experimenteller Bestimmung der Grenzdämpfung - $I_B = 1,7A$

Die Güte $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$des Pendels lässt sich ebenfalls in Abhängigkeit vom Strom darstellen:



Ausgleichskurve: $Q = \frac{1}{(7{,}2 \cdot 10^{-4} I + 175A)^2}$
Mit zunehmdender Dämpfung sinkt die Güte $Q \sim \frac{1}{I^2} \sim \frac{1}{\beta}$.

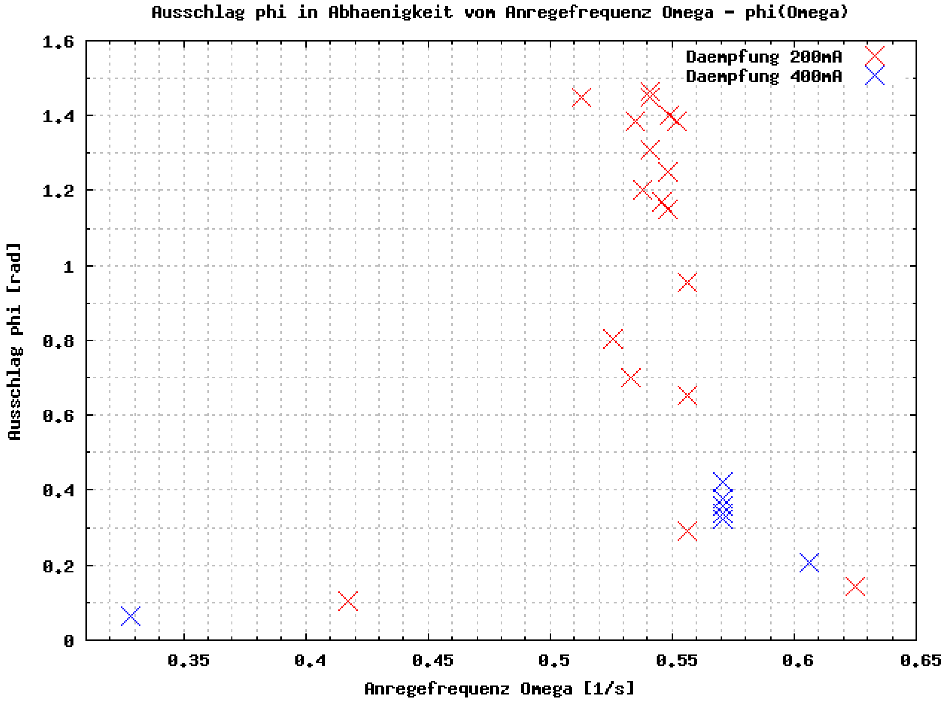
3. Winkelrichtgrösse der Feder

Die Winkelrichtgröße D^* der Feder lässt sich durch $D* = \frac{F}{\phi}$ bestimmen: $D^* = 13,8 \cdot 10^{-3} \cdot N$

Das Trägheitsmoment ist dann $\Theta = \frac{D \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} = 1,18 \cdot 10^{-3} \cdot kg \cdot m^2$, die erste Schätzung lag bei $\Theta = 1,4 \cdot 10^{-3} \cdot kg \cdot m^2$.

4. Erzwungene Schwingung

Nun wird dem Drehpendel durch äußere Anregung eine Schwingung aufgeprägt. Folgende Grafik sollte die Resonanzkurve zeigen, in der Nähe der Resonanz ist zumindest bei 200mA Dämpfung eine zunahme des Ausschlags zu erkennen, auch wenn die Werte sehr stark schwanken. Bei 400mA ist eine Aussage über die Resonanzfrequenz nicht wirklich sinnvoll, da zwischen 0,35Hz und 0,5Hz keine Messpunkte vorliegen.



Das fehlen der Messwerte bei der stärker gedämpften Schwingung kommt daher, dass hier die Frequenz des Motors sich durch die Feineinstellung nicht veränderte, die Grobeinstellung jedoch zu starke Frequenzänderungen bewirkte.

Die schwächer gedämpfte Schwingung lässt eine Resonanz bei ca. 0,54Hz erkennen, was mit dem theoretischen Wert $\Omega = \omega_0 = 0,545 Hz$ übereinstimmt.

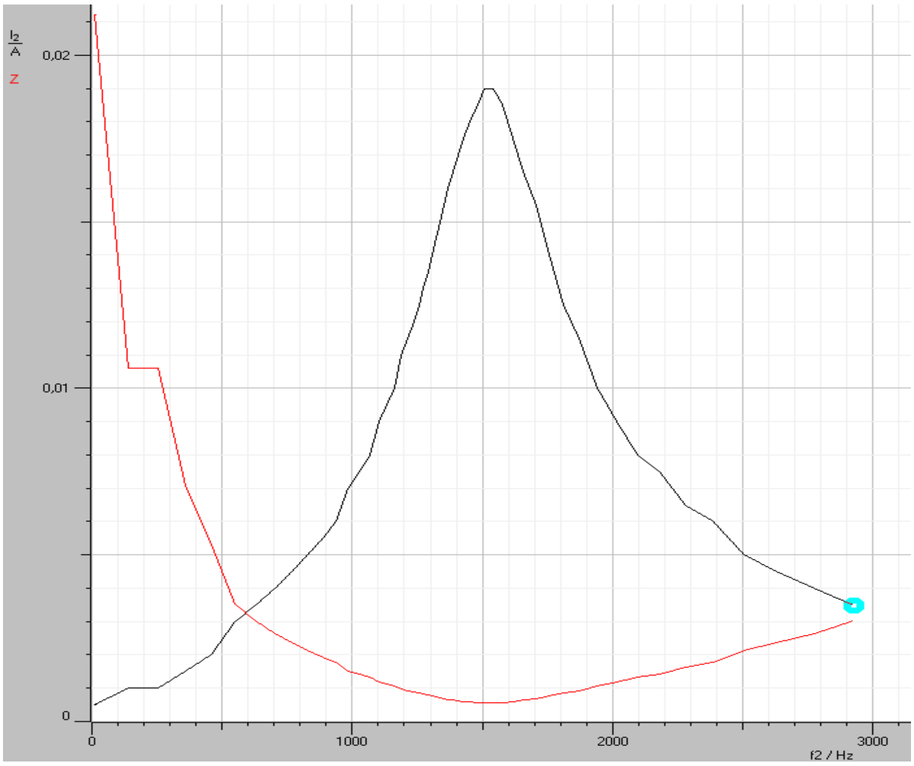
Die Güte Q lässt sich aus den Messwerten jedoch ebenfalls nicht sinnvoll bestimmen, da die Messwerte um den Resonanzbereich sehr stark gestreut sind und die $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Amplitudenpunkte sich nicht genau genug bestimmen lassen.

Die Phasenverschiebung ist in der Nähe der Resonanz etwa $\frac{\pi}{2}$ (ob Minus oder Plus lässt sich nicht beobachten), weit unterhalb der Resonanz nahezu 0. Bei hohen Frequenzen schwingt das Pendel der Anregung entgegen, was einer Phasenverschiebung von π entspricht. Diese Beobachtungen stimmen prinzipiell mit den theoretischen Werten überein.

5. Serienschwingkreis

Nun werden die Eigenschaften eines Serienschwingkreises mit Hilfe von CASSY untersucht.

5.1. **Dämpfungswiderstand** $R = 100\Omega$. .



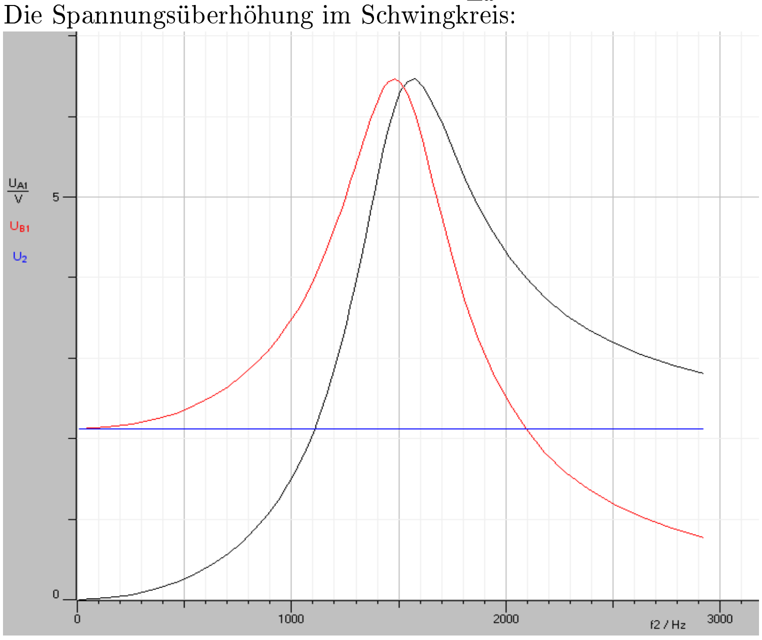
Schwarz: Strom durch den Schwingkreis; Rot: Impedanz des Schwingkreises.

Die Güte lässt sich aus der Resonanzbreite $\Delta\omega$ bestimmen:

$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_{A1} = 2 \cdot \pi \cdot (1541 - 1275)\frac{1}{s} = 1671\frac{1}{s}$, wobei $\omega_{A1/2}$ bei $I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{max}$ abgelesen wird, daher auch zwei verschiedene ω_A. $\omega_{A2} = 2 \cdot \pi \cdot 1811\frac{1}{s}$.

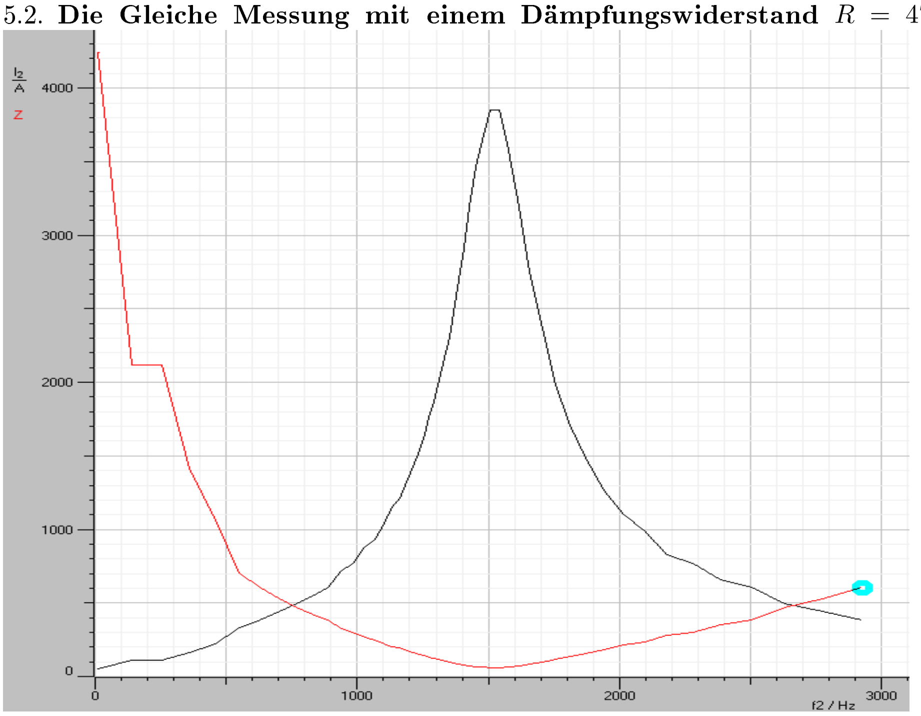
Die Güte ist dann der Mittelwert: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 5,75$

Die Spannungsüberhöhung im Schwingkreis:



Die Spannungsüberhöhung an der Spule (schwarz) und am Kondensator (rot)

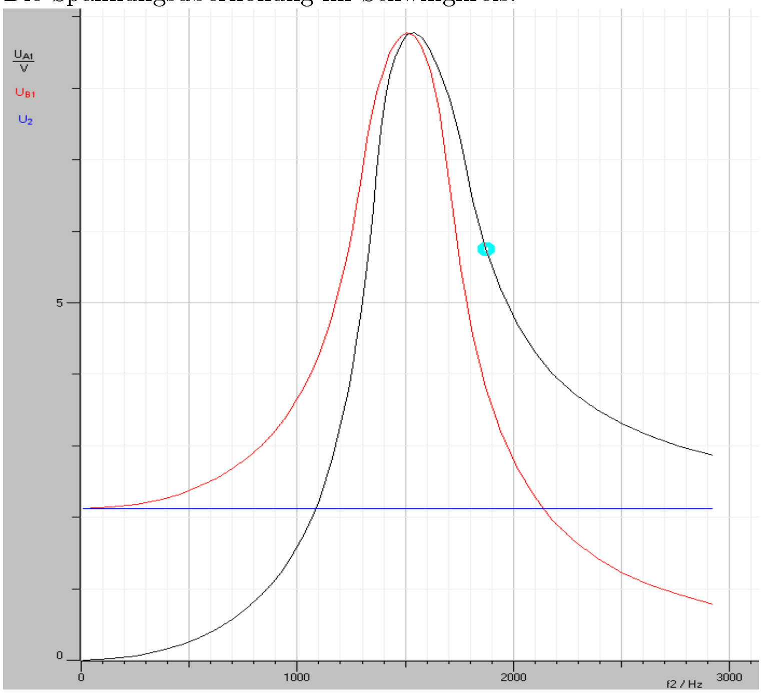
5.2. Die Gleiche Messung mit einem Dämpfungswiderstand $R = 47\Omega$.



Schwarz: Strom durch den Schwingkreis; Rot: Impedanz des Schwingkreises

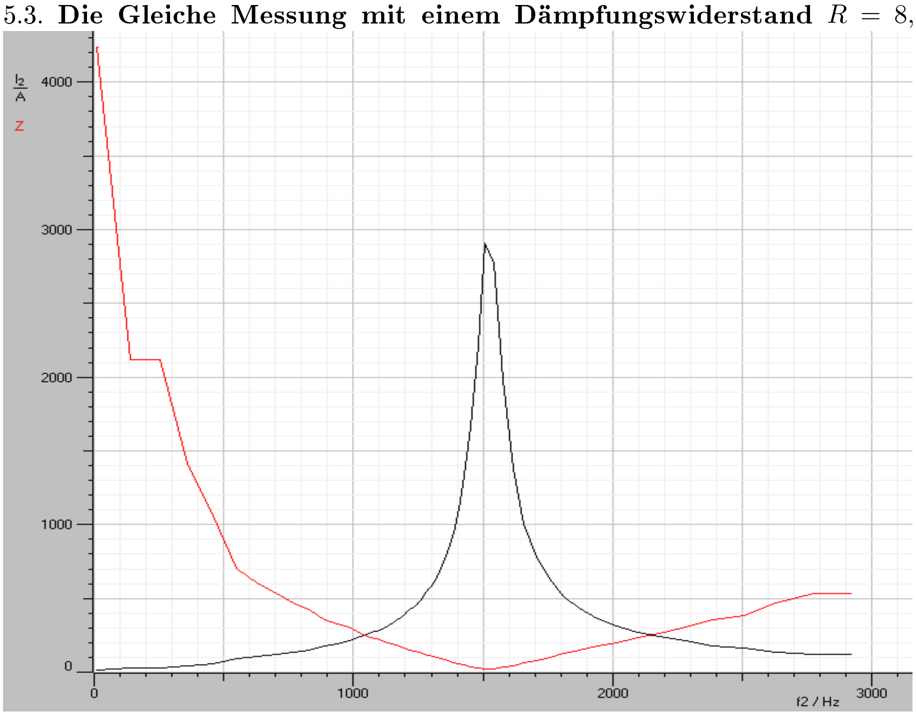
Die Güte ist hier bereits höher als bei der Dämpfung mit 100Ω: $Q = 11,2$

Die Spannungsüberhöhung im Schwingkreis:



Die Spannungsüberhöhung an der Spule (schwarz) und am Kondensator (rot)

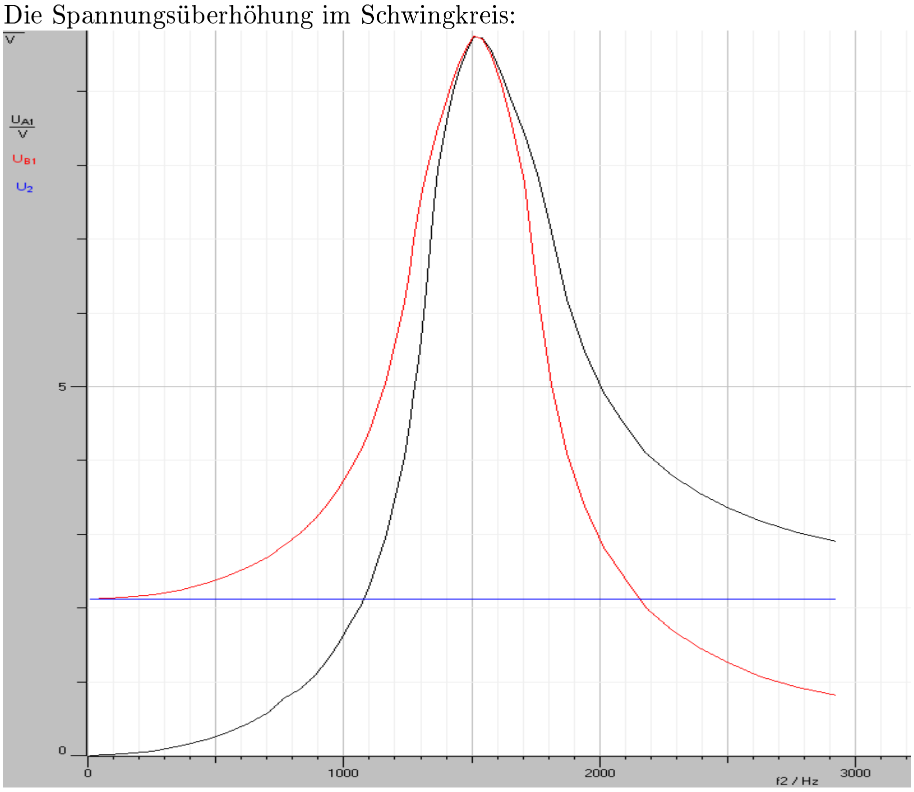
5.3. Die Gleiche Messung mit einem Dämpfungswiderstand $R = 8,2\Omega$.



Schwarz: Strom durch den Schwingkreis; Rot: Impedanz des Schwingkreises

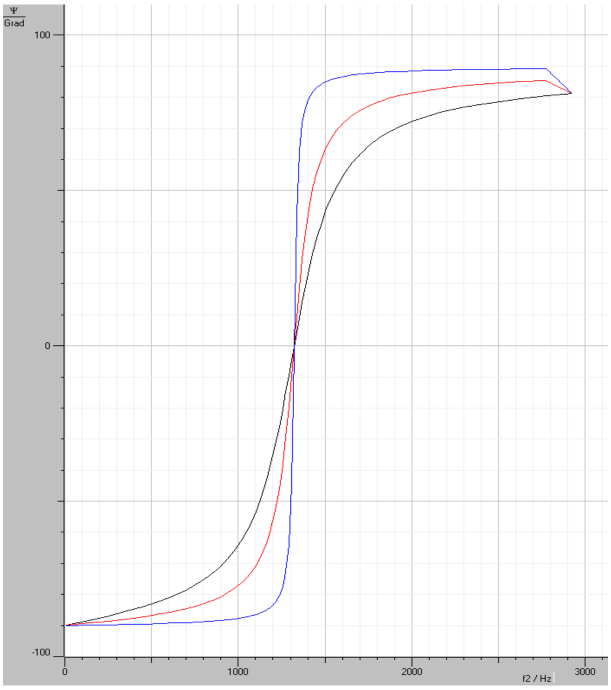
Hier ist die Güte wesentlich höher, was auch an der schmalen aber hohen Resonanzkurve erkennbar ist: $Q = 34$

Die Spannungsüberhöhung im Schwingkreis:



Die Spannungsüberhöhung an der Spule (schwarz) und am Kondensator (rot)

Die Phasenverschiebungen aller drei Schwingkreise:



Schwarze Kurve: 100Ω Dämpfung,
rote Kurve: 47Ω Dämpfung,
blaue Kurve: 8,2Ω Dämpfung.