

P2-80, 82: ABSORPTION VON BETA- UND GAMMASTRAHLUNG

GRUPPE 19 - SASKIA MEISSNER, ARNOLD SEILER

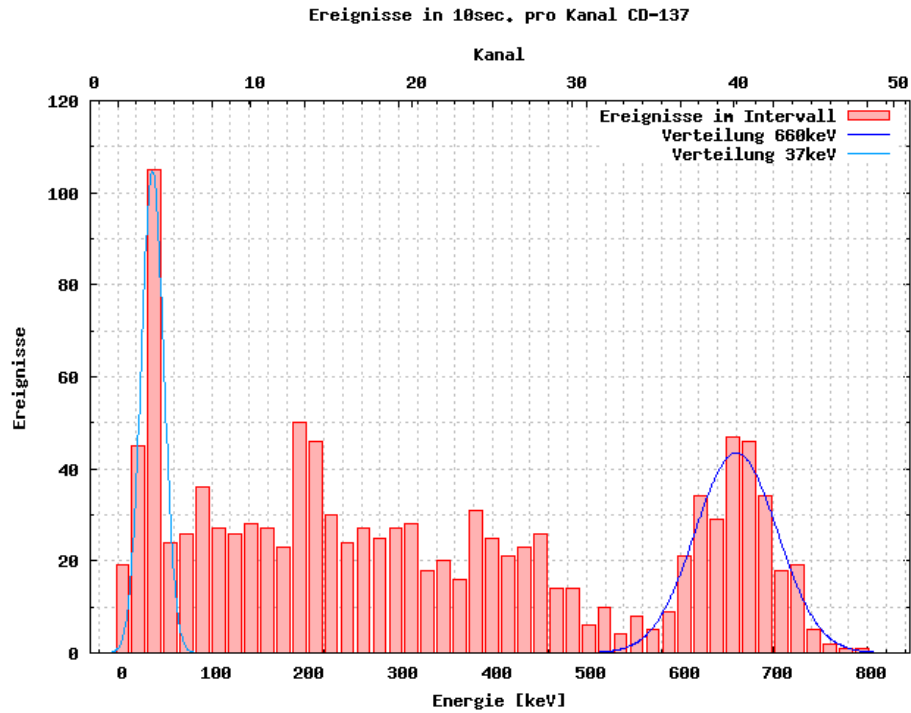
INHALTSVERZEICHNIS

1. Impulshöhenspektrum	1
1.1. Spektrum im Einkanalbetrieb	1
1.2. Spektrum im Mehrkanalbetrieb	3
1.3. Deutung der Spektren	7
2. Aktivität des ^{137}Cs Präparates	9
3. Statistik	9
4. Anhang	12
4.1. Berechnung der Energieskala	12
4.2. Fehlerrechnung	12

1. IMPULSHÖHENSPEKTRUM

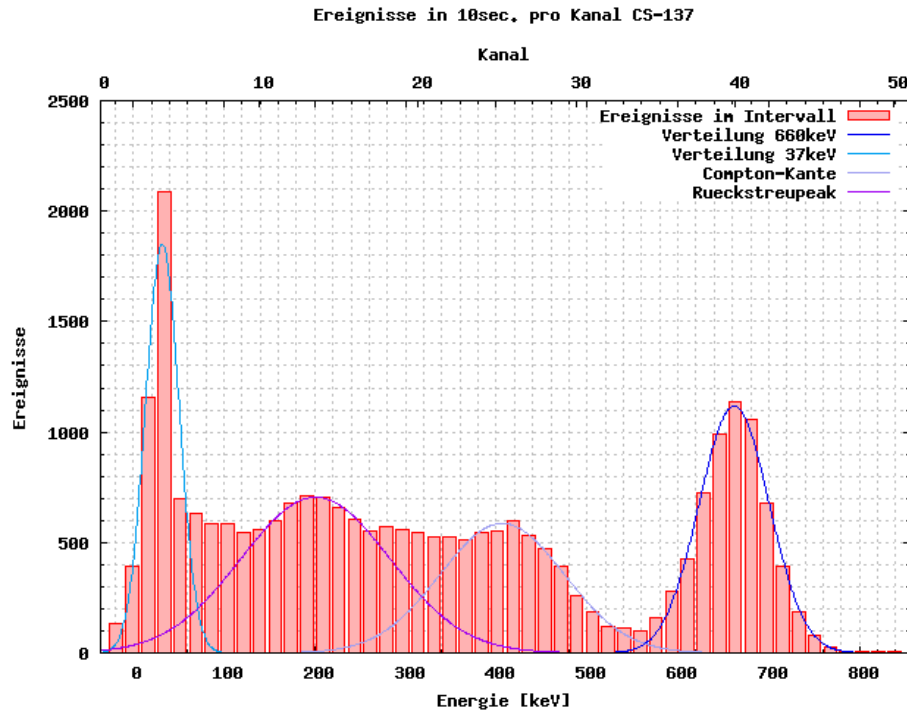
Um den Szintillationszähler kennen zu lernen und richtig einzustellen haben wir vor dem eigentlichen Versuch einige Spektren von ^{137}Cs im Vielkanalbetrieb aufgenommen.

1.1. Spektrum im Einkanalbetrieb. Zunächst nehmen wir nach dem Einstellen jedoch ein Spektrum von ^{137}Cs im Einkanalbetrieb auf. Dabei werden vom Impulshöhenzähler nur die Ereignisse gezählt, die eine vorgegebene Höhe haben. Dazu teilt dieser die Maximalhöhe, die vorher passend justiert wurde, in Bereiche ein - die Kanäle die mit CASSY gemessen werden. Jeder Kanal entspricht einem Energieintervall, in dem die registrierten γ -Quanten liegen.



Spektrum von ^{137}Cs , im Einkanalbetrieb aufgenommen, 10s Messzeit pro Kanal, 50 Kanäle

Bei einer geringen Gesamtzählrate ist das aufgenommene Spektrum aufgrund der statistischen Schwankungen bei der Messung entsprechend schlecht. Die Schwankungen sind teilweise größer, als die Effekte die beobachtet werden sollen. Man erkennt jedoch bereits den Photopeak bei 660keV (bzw. Kanal #40) und den Röntgenpeak bei 32keV (Kanal #3,9). Die Kanalnummer bestimmt man am geschicktesten, in dem man eine Gaußverteilung auf den Peak fittet. Der Mittelwert liegt dann bei dem Kanal, dem man die entsprechende Energie zuordnen kann. Mit zwei bekannten Energien kann man so eine Energieskala zu den Kanälen angeben (siehe auch 4.1).

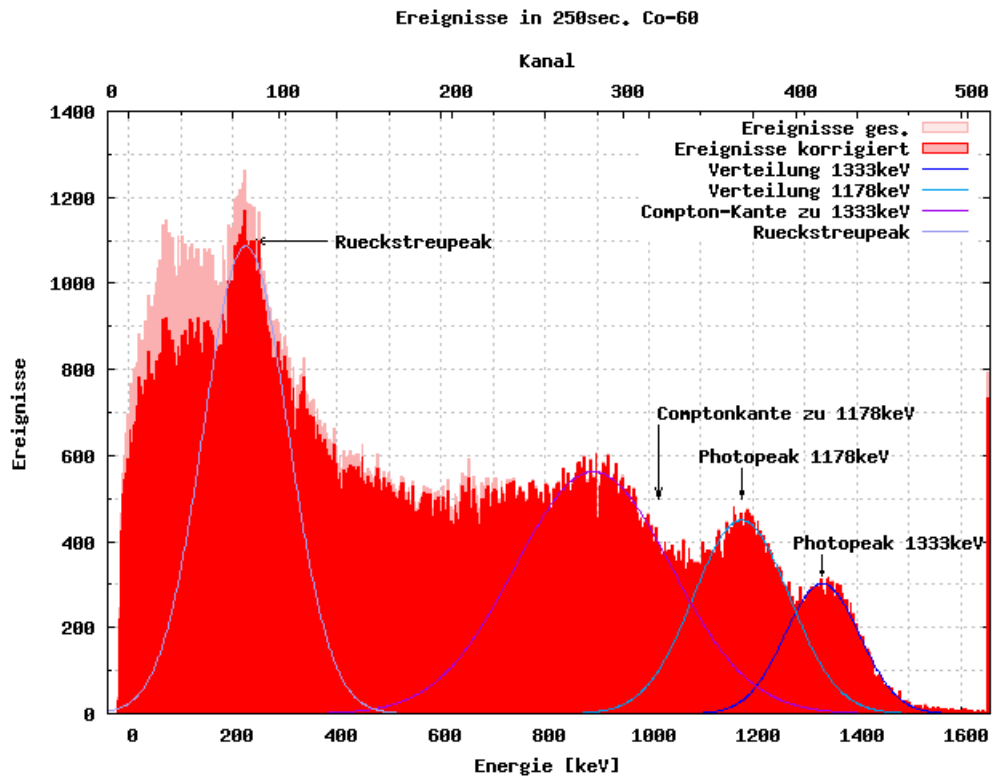


Spektrum von ^{137}Cs , im Einkanalbetrieb aufgenommen, 10s Messzeit pro Kanal, 50 Kanäle

Erhöht man die Gesamtzählrate, so wird auch das Spektrum klarer, da die statistischen Schwankungen sich ausgleichen. Neben dem Photopeak und dem Röntgenpeak werden weitere bevorzugte Energien erkennbar. Der Rückstreupeak ist bei $E_R = (201 \pm 7)\text{keV}$ erkennbar, theoretisch erwartet man ihn bei 185keV. Bei 477keV erwartet man die Compton-Kante, die wir mit einer Normalverteilung über den Bereich der Kante finden. Der Mittelwert der Verteilung und die Standardabweichung $\bar{x} + \sigma_x$ ergeben den Punkt, an dem die Ereignishäufigkeit auf 0,84 gegenüber dem höchsten Punkt direkt vor der Kante abgefallen ist. So ergibt sich hier eine Compton-Kante von $E_C = (475 \pm 11)\text{keV}$, was der Erwartung entspricht. Die Werte (\bar{x}, σ_x) der Normalverteilungen in der Grafik und die Messwerte sind im Anhang, Tabelle „1_1 einkanal hohe Rate“

1.2. Spektrum im Mehrkanalbetrieb. Die Messung der Spektren erfolgt nun im Vielkanalbetrieb, d.h. alle Impulshöhen werden gleichzeitig gemessen und dem entsprechenden Intervall zugeordnet. Daher kann man pro Kanal wesentlich länger messen, was die Ereigniszahlen wesentlich größer macht und somit eine bessere Auflösung der Spektren ergibt. Zudem kann man die Anzahl der Kanäle erhöhen, ohne länger messen zu müssen, was ebenfalls zu einer verbesserten Auflösung führt.

Zunächst justieren wir den Szintillationszähler so, dass auch die beiden höherenergetischen Peaks von ^{60}Co erkennbar sind.

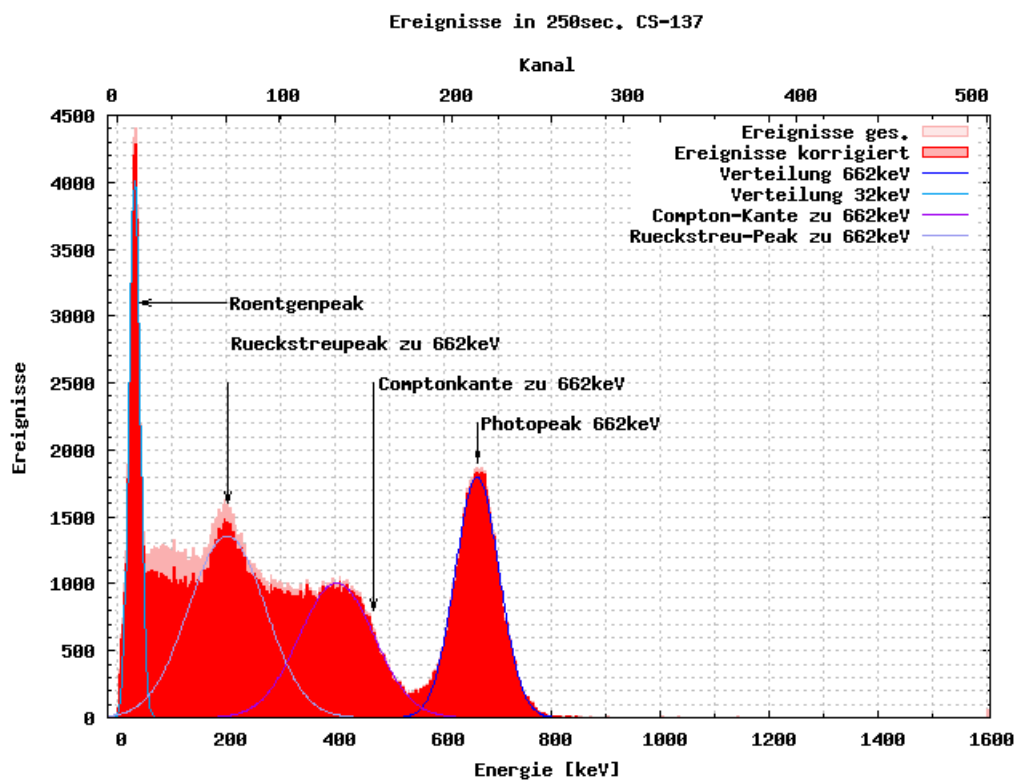


Spektrum von ^{60}Co , im Vielkanalbetrieb aufgenommen, 250s Messzeit, 512 Kanäle

Die Energieskala wird wie in 1.1 berechnet und ist in der Grafik unten eingezeichnet. Die Verteilungen berechneten wir generell bezüglich der Kanal-Skala oben in der Grafik, da sich die Ergebnisse dann leicht auf eine beliebige Eichung übertragen lassen. Dies ist jedoch erst für den Vergleich der Spektren miteinander wichtig (siehe 1.3).

Die verschiedenen Peaks des Spektrums lassen sich wieder wie in 1.1 bestimmen (beachte bei der Compton-Kante: $\#Kanal_{C-Kante} = \bar{x} + \sigma_x$, sonst $\#Kanal_{Peak} = \bar{x}$). Die Werte sind in Tabelle „1_2 CO60“ aufgeführt, die Energien beziehen sich auf die Eichung mit den ^{137}Cs -Peaks.

Die beiden Photopeaks sind deutlich zu erkennen, die Comptonkante der 1333keV Strahlung ist nicht sichtbar, da sie mit dem Photopeak der 1178keV Strahlung zusammenfällt. Die Comptonkante der 1178keV Strahlung ist jedoch gut zu erkennen. Der Rückstreupeak ist eine Überlagerung der beiden einzelnen Rückstreupeaks, da diese recht nahe beieinander liegen.

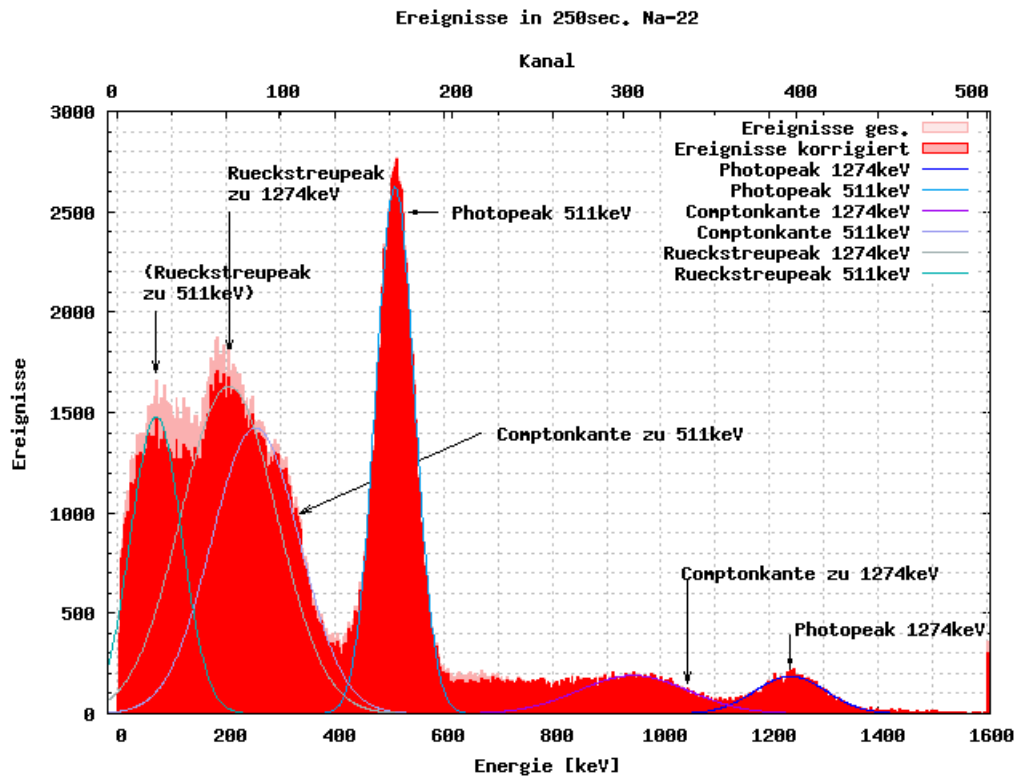


Spektrum von ^{137}Cs , im Vielkanalbetrieb aufgenommen, 250s Messzeit, 512 Kanäle

In den Spektren ist bereits die Untergrundstrahlung berücksichtigt, die weiter unten gemessen wird. Die hellroten Balken im Hintergrund entsprechen den tatsächlichen Messwerten, der rote Vordergrund ist bereits um das Untergrundspektrum korrigiert.

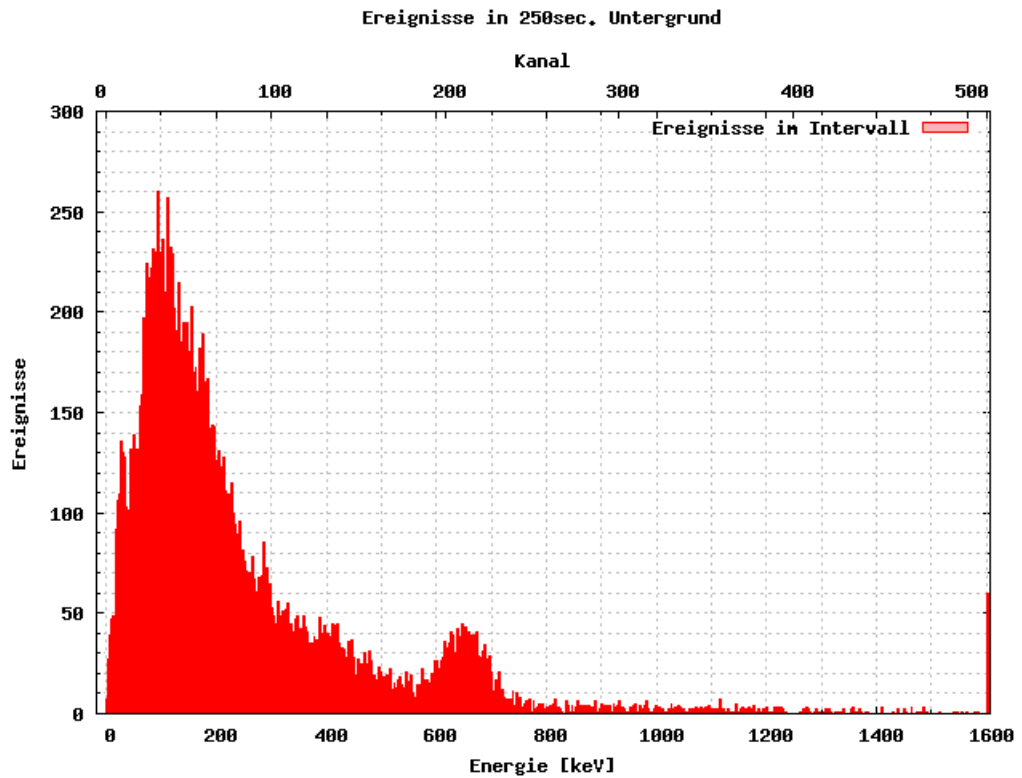
Bei ^{137}Cs sind die einzelnen Peaks besser zu erkennen, da nicht zwei Spektren überlagert sind, wie es bei ^{60}Co der Fall ist. Die Comptonkante und der Rückstreupic zu der Röntgenstrahlung sind nicht erkennbar, da das Spektrum auf andere Energien justiert ist.

Dieses Spektrum wird in 1.3 zur Justierung verwendet, da sich die Photopeaks sehr scharf zuordnen lassen. Die berechneten Werte sind in der Tabelle „1_2 CS137“ zu finden.



Spektrum von ^{22}Na , im Vielkanalbetrieb aufgenommen, 250s Messzeit, 512 Kanäle

Dieses Spektrum ist das einzige, in dem alle Peaks einigermaßen erkennbar sind. Zunächst sticht der 511keV Photopeak ins Auge, dessen Strahlung auch die hohe Ereignisrate im niederenergetischen Bereich bestimmt. Die Comptonkante der 511keV Strahlung ist mit dem Rückstreupeak der hochenergetischen 1274keV Strahlung überlagert, jedoch ist erkennbar, dass oberhalb (höhere Energie) dieses Rückstreupeaks noch Ereignisse der Compton-Streuung liegen. Der Rückstreupeak der 511keV Strahlung ist im Compton-Kontinuum jedoch eher zu errahnen, als tatsächlich messbar. Die zugehörige Tabelle ist „1_2 Na22“ im Anhang.

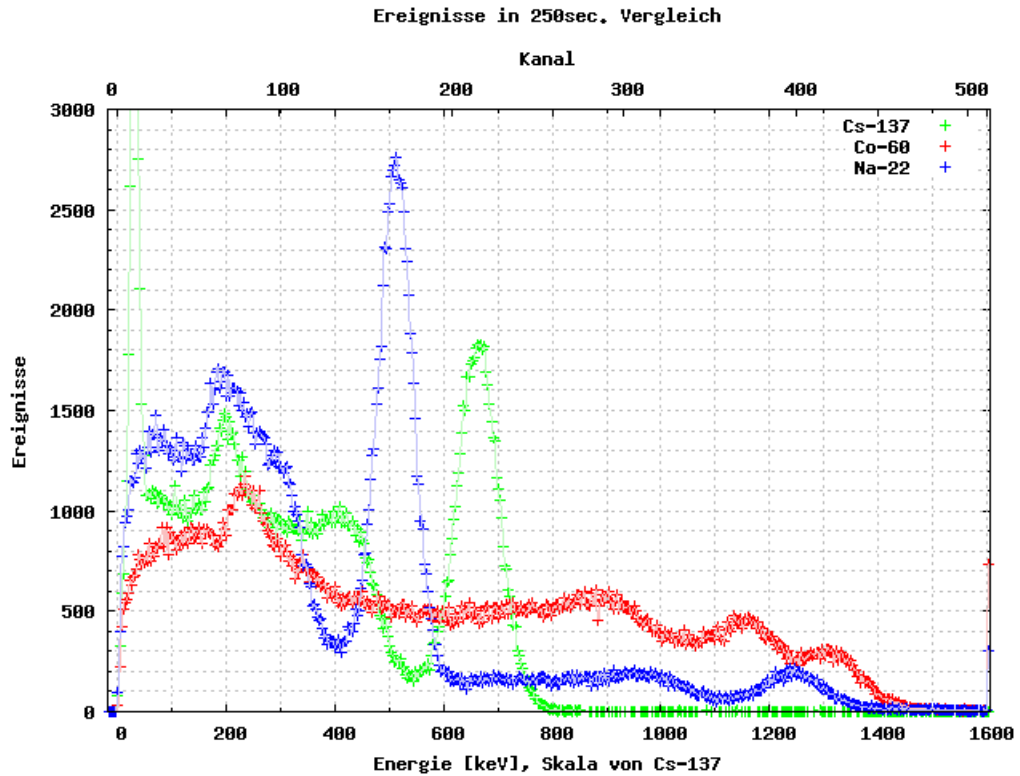


Spektrum der Untergrundstrahlung, im Vielkanalbetrieb aufgenommen, 250s Messzeit, 512 Kanäle

Energieskala von ^{137}Cs

Die Untergrundstrahlung wird in den Spektren abgezogen, da sie zwar gemessen wird, jedoch nicht vom Strahler kommt.

1.3. Deutung der Spektren. Nun sollen die Spektren verglichen und anhand der Energieskala von ^{137}Cs gedeutet werden. Da sich die Werte aus den Anpassungen in der vorigen Aufgabe auf die Kanäle des Messsystems bezogen, lassen sich die Werte problemlos auf die Skalierung von ^{137}Cs umrechnen.



Alle Spektren im Vergleich,
 ^{137}Cs grün; ^{60}Co rot; ^{22}Na blau;

Die Energien beziehen sich nun auf die Eichung anhand des Photopeaks und des Röntgenpeaks von ^{137}Cs .

Strahler	Energie Photopeak [keV]	Comptonkante [keV]	Rückstreupeak [keV]
^{60}Co	$1296 \pm 51 \pm 7$	$1019 \pm 126 \pm 7$	$236 \pm 60 \pm 3$
	$1464 \pm 70 \pm 7$	1. Photopeak	1. Rückstreupeak
^{137}Cs	$662 \pm 23 \pm 1$	$472 \pm 51 \pm 2$	$202 \pm 53 \pm 2$
	$32 \pm 8 \pm 1$	nicht messbar	nicht messbar
^{22}Na	$1238 \pm 49 \pm 3$	$1050 \pm 83 \pm 7$	$205 \pm 70 \pm 2$
	$511 \pm 18 \pm 1$	$335 \pm 63 \pm 3$	$(72 \pm 29 \pm 3)$

Der statistische Fehler ergibt sich aus der Standardabweichung der gefitteten Normalverteilungen. Dabei wird $\sigma_{\bar{x}}$ genau so wie \bar{x} in eine Energie umgerechnet. Der systematische Fehler ergibt sich aus der Normierung der Energieskala anhand der Messwerte. Berücksichtigt man auch die Standardabweichung der ^{137}Cs -Peaks, die zur Normierung verwendet wurden, wäre der Fehler der Energieskala zu groß, um sinnvolle Aussagen über die anderen Spektren machen zu können. Daher fließt in den Fehler der Energieskala nur der Fehler des Mittelwerts der ^{137}Cs -Peaks mit ein.

Der Wert für den zweiten Rückstreupeak bei ^{22}Na ist nicht unbedingt sinnvoll, da der Peak im Spektrum kaum erkennbar ist.

Die gemessenen Werte kann man nun noch mit den theoretisch erwarteten Energien vergleichen. $\Delta = \frac{E_{\text{exp}} - E_{\text{theo}}}{E_{\text{theo}}}$ ist die Abweichung der Messwerte von den theoretisch erwarteten Energien.

Strahler	Photopeak	Abweichung	Comptonkante		Rückstreupeak	
^{60}Co	1333keV	+10%	1119keV	-9%	214keV	+10%
	1178	+10%	968	-10%	210	-
^{137}Cs	662	-	478	-1%	184	+10%
	32	-	-	-	-	-
^{22}Na	1274	-3%	1061	-1%	213	-4%
	511	0%	341	-2%	170	-58%

Insgesamt stimmen die gemessenen Werte sehr gut mit den Erwartungen überein. Bei den Photopeaks von ^{137}Cs ist keine Abweichung vorhanden, da die Skala auf diese Peaks geeicht wurde. Der zweite Rückstreupeak weicht stark vom erwarteten Wert ab, was jedoch nicht verwunderlich ist, da der Peak nur sehr schlecht auszumachen ist.

Die Werte zeigen auch, dass der Szintillationszähler zumindest einigermaßen linear bezüglich der Strahlungsenergie ist, da die Streuungen sowohl nach oben als auch nach unten gehen.

Die Anzahl der Photonen, die zum Photopeak bei ^{137}Cs beitragen, lässt sich durch $N = (\frac{E}{\Delta E})^2$ berechnen, wobei $E = 662\text{keV}$ und $\Delta E = 30\text{keV} \approx 2,35 \cdot \sigma_E$. Für die Anzahl der Elektronen ergibt sich somit $N \approx 73$. Eine Fehlerangabe ist an dieser Stelle nicht sinnvoll, da es sich nur um eine grobe Abschätzung handelt. Daraus ist jedoch bereits erkennbar, dass die Einteilung des Spektrums mehr als 256 Kanäle nicht mehr weiter zur Verbesserung der Messgenauigkeit beiträgt, da der Photomultiplier nur in Einheiten von einfallenden Elektronen verstärken kann. Es gibt eben keine halben Elektronen.

2. AKTIVITÄT DES ^{137}Cs PRÄPARATES

Um die Aktivität des ^{137}Cs Präparates zu bestimmen, haben wir bei 3 verschiedenen Abständen jeweils ein Spektrum aufgenommen. Das Spektrum kann man nun in Energiebereiche einteilen, um die Effizienz des Szintillationszählers aus der Tabelle (Vorbereitungshilfe) passend auswählen zu können. Wir haben das Spektrum in 4 Bereiche eingeteilt und jeweils ungefähr die mittlere Effizienz aus der Tabelle abgelesen.

Aus der Summe über die Ereignisse N im jeweiligen Energiebereich errechnet sich die jeweilige Zählrate Z unter Berücksichtigung der Totzeit τ als $Z = \frac{N}{T-\tau}$. Die Messdauer T betrug 250s.

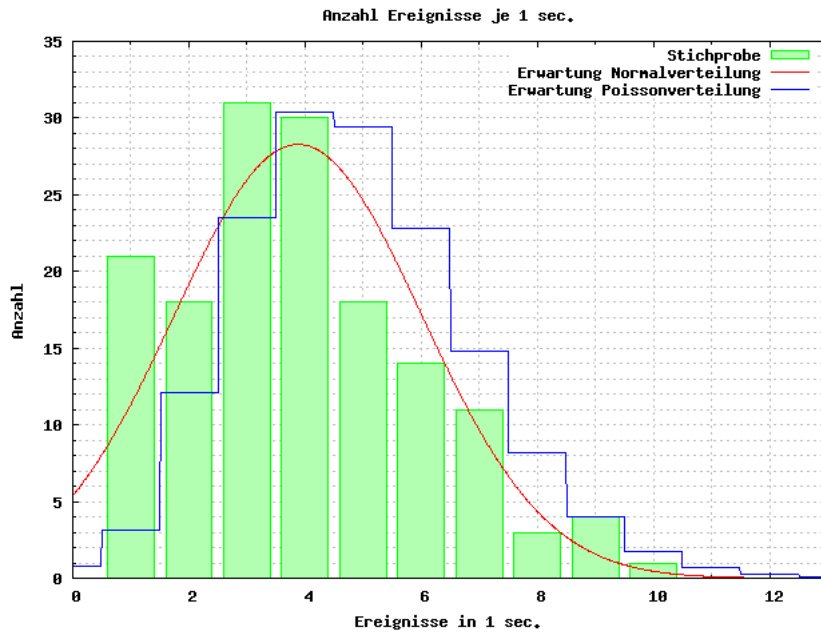
Für die drei Abstände erhält man drei Aktivitäten (Berechnung, siehe Tabelle „2 aktivität“ 1 bis 3)

Abstand	2cm	4cm	7,1cm
Aktivität	26860	13697	10013

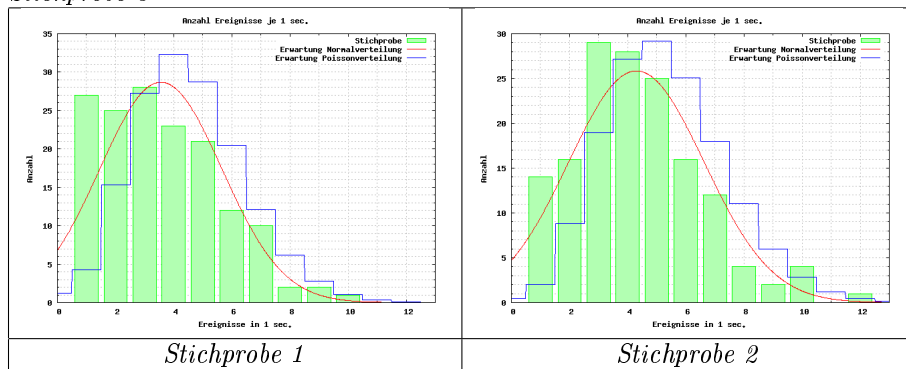
Da der die Werte sehr unterschiedlich sind, ist fraglich, ob diese Messung ein sinnvolles Ergebnis liefert. Die starke Abweichung hängt möglicherweise damit zusammen, dass sich die mittlere Effizienzen in der Tabelle schlecht ablesen lässt und dass man in Energiebereiche einteilen muss.

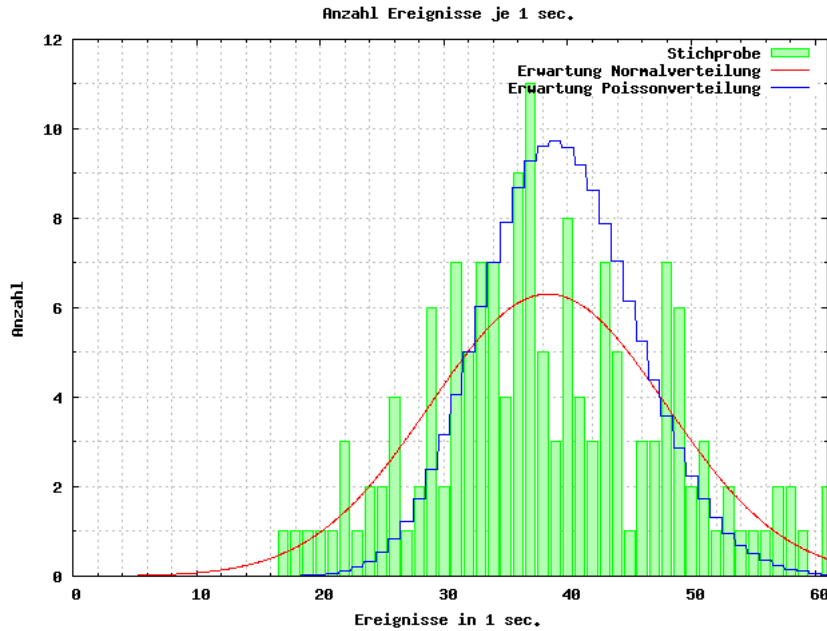
3. STATISTIK

Da ein Kernzerfall ein vollkommen zufälliges Ereignis ist, lassen sich an Zählraten sehr gut die statistischen Theorien testen. Für die Stichproben summiert man so viele Energien eines Spektrums auf, dass im Mittel etwa drei Ereignisse pro Spektrum gemessen wurden. Für die verschiedenen Stichproben wurde jeweils über einen anderen Energiebereich summiert.



Stichprobe 3





Gesamtes Spektrum

Für die Stichproben ergeben sich dabei folgende Werte für dem Mittelwert \bar{x} , die Standardabweichung σ und die Standardabweichung des Mittelwerts $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Dabei ist n der umfang der Stichprobe, in unserem Fall $n = 151$. Der Quotient $\frac{\sqrt{\bar{x}}}{\sigma}$ sollte nahe bei 1 liegen, wenn die Verteilung einer Poissonverteilung folgen soll.

Stichprobe	\bar{x}	σ	$\sigma_{\bar{x}}$	$\frac{\sqrt{\bar{x}}}{\sigma}$
1	3,56	2,1	0,17	0,9
2	4,3	2,23	0,18	0,93
3	3,88	2,13	0,17	0,92
gesamt	28,41	9,55	2,39	0,65

Setzt man diese Werte in die Normalverteilung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp(-\frac{1}{2} \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2})$ bzw. die Poissonverteilung $g(x) = \frac{\bar{x}^x}{x!} \cdot e^{-\bar{x}}$ ein, erhält man die eingezeichneten Erwartungswerte.

Möchte man nun wissen, welcher Verteilung die Messwerte folgen, kann man den χ^2 -Test durchführen: $\chi^2 = \sum_{n=1}^m \frac{(n_{mess} - n_{theo})^2}{n_{theo}}$, wobei m die Anzahl der Klassen ist. Führt man für obige Werte den χ^2 -Test durch, erhält man folgendes:

Test für	Stichprobe 1	Stichprobe 2	Stichprobe 3	Stichprobe gesamt
Poissonverteilung	15,38	15,73	13,66	403,22
Normalverteilung	19,5	28,29	16,85	36,11

Die Stichproben haben je 12 Klassen, d.h. für die Poissonverteilung ist $\chi^2 = 24,72$ mit 11 Freiheitsgraden und 1% Irrtumswahrscheinlichkeit, für die Normalverteilung ist $\chi^2 = 23,21$ mit 10 Freiheitsgraden (da man 2 Werte aus den Messwerten bestimmt) und ebenfalls 1% Irrtumswahrscheinlichkeit.

Für die Stichprobe aus allen Messwerten hat man 60 Klassen und somit für die Poissonverteilung $\chi^2 = 87,17$ und für die Normalverteilung $\chi^2 = 85,95$.

Bei den „kleinen“ Stichproben wird somit nur bei der zweiten eine Gaußverteilung abgelehnt, ansonsten werden beide Verteilungen akzeptiert. Bei der „großen“ Stichprobe wird eine Poissonverteilung klar abgelehnt, was auch schon an dem Quotient in obiger Tabelle $\frac{\sqrt{\bar{x}}}{\sigma} = 0,65$ erkennbar wird. Die Normalverteilung wird für diese Stichprobe akzeptiert.

4. ANHANG

4.1. Berechnung der Energieskala. Aus der Kanalnummerierung und zwei (oder mehr) charakteristischen Peaks mit bekannter Energie kann man eine Energieskala in die Grafiken einzeichnen. Geht man davon aus, dass die Kanalnummer linear mit der Energie der gemessenen Photonen zusammenhängt, so kann man aus der Kanalnummer x die zugehörige Energie als $E_x = mx + c$ berechnen. Die Werte für m und c erhält man aus der Zuordnung zweier charakteristisch erkennbarer Energien zu der gemessenen Kanalnummer.

Kann man Kanal K_1 der Energie E_1 und Kanal K_2 der Energie E_2 zuordnen, erhält man $m = \frac{E_1 - E_2}{K_1 - K_2}$ und $c = E_1 - m \cdot K_1$. Die Fehler berechnen sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (siehe 4.2). Die Kanalnummer zur Energie lässt sich am besten bestimmen, in dem man eine Gauß-Normalverteilung auf den Peak fittet - der Mittelwert entspricht dann dem gesuchten Kanal, der Fehler des Mittelwerts führt zum Fehler der Energieskala.

4.2. Fehlerrechnung .

- Formeln für die Fehlerrechnung und die Lineare Regression (least square fit):
- Steigung einer Ausgleichsgeraden:
 - $m = \frac{N \cdot (\sum x_i y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{\Delta}$, mit $\Delta = N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2$.
 - Fehler der Steigung:
 - $\sigma_m^2 = \frac{\sigma_y^2}{\Delta} \cdot N$, mit der Anzahl der Messpunkte N
 - und $\sigma_y^2 = \frac{1}{N-2} \cdot \sum (y_i - c - m \cdot x_i)^2$.
 - y-Achsenabschnitt:
 - $c = \frac{(\sum x_i^2) \cdot (\sum y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum x_i y_i)}{\Delta}$
 - Fehler von c:
 - $\sigma_c = \frac{\sigma_y^2}{\Delta} \cdot \sum x_i^2$
- Allgemeine Fehlerfortpflanzung (Gaußsche Fehlerfortpflanzung):
 - mit $a(x_1, x_2, \dots)$ ist der Fehler von a:
 - $\sigma_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + \dots}$.