$$\vec{B}(t) = B_0 \hat{e}_z + B_1 (\hat{e}_x \cos(\omega t) - \hat{e}_y \sin(\omega t))$$

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\Omega_R^{(0)}}{2}(\sigma_x \cos\omega t - \sigma_y \sin\omega t)$$

Bloch Gleichungen Kohärenz Relaxation

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{M}(t)\rangle = \gamma\langle\vec{M}\rangle \times B_0\hat{e}_z - \frac{1}{T_1}(\langle M_z\rangle - M_0)\hat{e}_z$$

$$-\frac{1}{T_2}(\langle M_x\rangle\hat{e}_x + \langle M_y\rangle\hat{e}_y)$$

Dekohärenz

3.3 Zwei Spins

Betrachte 2 (unterscheidbare) Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen

$\vec{S}^{(1)}$ und $\vec{S}^{(2)}$

mit den üblichen Relationen wie $[S^2, S_z] = 0$

$\Rightarrow$ Eigenbasis $|s, m\rangle = |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$

Eigenwerte $S^2|s,m\rangle = s(s+1)\hbar\,|s,m\rangle$

$S_z|s,m\rangle = m\hbar\,|s,m\rangle$

Da $s = \frac{1}{2}$ und $m = \pm\frac{1}{2}$ schreibe $|+\rangle$ bzw $|-\rangle$

und $[S_\alpha^{(1)}, S_\beta^{(2)}] = 0 \qquad (\alpha, \beta = x, y, z)$

da sie auf getrennte Unterräume wirken

$\Rightarrow$ gemeinsame Basis, 4 Basiszustände

$\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\} = |\mu, \nu\rangle$

- Wechselwirkende Spins, z. B.

$$H = \gamma\, S^{(1)} \cdot S^{(2)}$$

aber $[H, S^i] \neq 0 \qquad (i = 1, 2)$

Eigenzustände und Eigenwerte?

H als 4×4 Matrix darstellen mit Matrixelement

$$\langle \mu'\nu'|H|\mu\nu\rangle$$

$\Longrightarrow$ Übungsblatt

$$H = \gamma \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|++\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|--\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenzustände und Eigenwerte

3 Triplett (triplet)

$T_+ = |++\rangle$

$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle)$

$T_- = |--\rangle$

1 Singulett (singlet)

$S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$

$E_{T_+} = E_{T_0} = E_{T_-} = \gamma \frac{\hbar^2}{4}$ Entartung (für $B=0$)

$E_S = -\frac{3}{4} \gamma \hbar^2$ Grundzustand für $\gamma > 0$

Gesamtspin $\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$

z.B. mit Magnetfeld $H = \gamma \vec{S}^{(1)} \vec{S}^{(2)} - \gamma (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) B$

Aus den Eigenschaften von $\vec{S}^{(1)}$ und $\vec{S}^{(2)}$ folgt dass $\vec{S}$ auch ein Drehimpuls ist.

also $[S^2, S_z] = 0$, $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$

$\Longrightarrow$ EV und EW wie üblich

$S^2 |S M\rangle = S(S+1)\hbar |S M\rangle$ aber $S = ?$

$S_z |S M\rangle = M \hbar |S M\rangle$ $M = ?$

Konstruiere $|S M\rangle$ aus Basiszuständen $|\mu, \nu\rangle$

$$S^2 = S^{(1)2} + S^{(2)2} + 2 S^{(1)} S^{(2)}$$

$$= \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenzustände sind wieder Triplett und Singulett

$T_+ = |1\,1\rangle$

$T_0 = |1\,0\rangle$ $\qquad S = |0\,0\rangle$

$T_- = |1\,-1\rangle$

Mit Magnetfeld:

$$E_{T+} = J\frac{\hbar^2}{4} - \gamma\hbar \overset{\overset{1}{\|}}{M} B$$

$$E_{T0} = J\frac{\hbar^2}{4} \qquad (M = 0)$$

$$E_{T-} = J\frac{\hbar^2}{4} + \gamma\hbar B \qquad (\text{da } M = -1)$$

$$E_S = -\frac{3}{4}J\hbar^2$$

3.4 Verschränkte Zustände

Singulett und Triplett-Zustände können nicht als Produkt geschrieben werden

⇒ sie sind "verschränkte" Zustände

Bei komplizierteren Vielteilchenzuständen ist es i. A. ein Problem, nachzuprüfen, ob der Zustand verschränkt ist.

Es gibt "Maße von Verschränkung"

z.B. $|\psi\rangle = |+\rangle^{(1)}|+\rangle^{(2)} + \varepsilon\left(|+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)} - |-\rangle^{(1)}|+\rangle^{(2)}\right)$

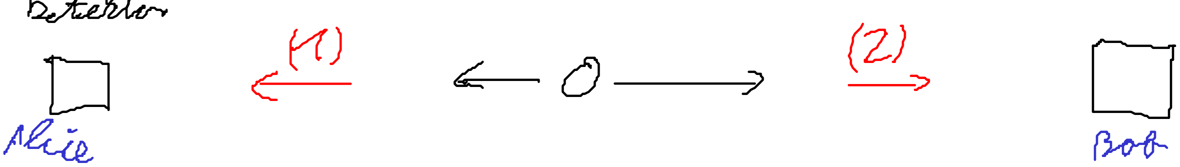
für $\varepsilon \ll 1$ ⇒ alle Messgrößen im Wesentlichen wie beim Produktzustand.

Aber für ε größer, mehr und mehr verschränkt

Einstein - Podolski - Rosen "Paradoxon"

Gedankenexp. Teilchen mit Spin 0 zerfällt in 2 Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen → Singulett

(wg. Spin Erhaltung)



Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$

Wenn Alice Spin S_z misst und Ergebnis $+\frac{\hbar}{2}$ findet, weiß sie, dass Bob $-\frac{\hbar}{2}$ finden wird.

Alice projeziert Zustand auf $\Psi = |+-\rangle$

$\Rightarrow$ Bob kann nur noch $|-+\rangle$ messen

$\Longrightarrow$ Nichtlokalität der QM

(später Bellsche Ungleichung $\Rightarrow$ Übung)

Schrödinger Katze

Atom, das zerfallen kann: Zustand $|e\rangle$, $|g\rangle$ (excited, ground)

überträgt sich auf Katze $|\text{lebt}\rangle$, $|\text{tot}\rangle$

Anfang $$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle|\text{lebt}\rangle + |g\rangle|\text{tot}\rangle\right)$$

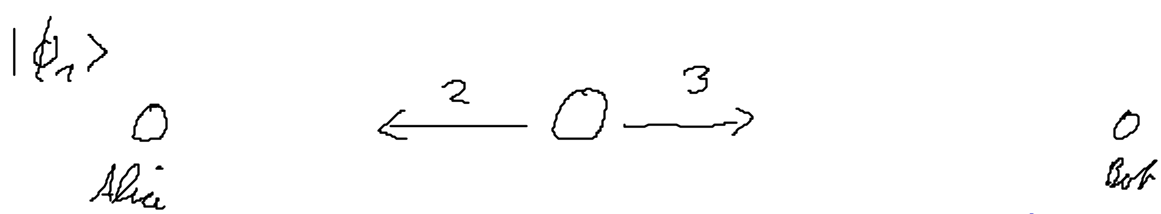
es gibt solche Zustände, sie sind aber sehr schwer zu beobachten (Energieauflösung, $\pm\hbar$ bei $10^{23}\hbar$ ist kaum zu messen)

Vortasten: 1 Teilchen, 10 Teilchen, ...

Quanten Teleportation

Ziel: teleportiere Zustand $|\phi_1\rangle$ instantan von A nach B

$$|\phi\rangle_1 = a\,|+\rangle_1 + b\,|-\rangle_1$$



Zur Vorbereitung tauschen A und B einen EPR-Zustand (Einstein Pod. Rosen) (Singulett) aus. $$|\Psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_2|-\rangle_3 - |-\rangle_2|+\rangle_3\right)$$

Anfangszustand ist Produktzustand $|\phi\rangle_1|\Psi\rangle_{23}$

$$|\phi\rangle_1 |\psi\rangle_{23} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 - |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 \right)$$

$$+ \frac{b}{\sqrt{2}} \left(|-\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 - |-\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 \right)$$

Teleportation wird durch Messung erzeugt

Und zwar misst A eine Observable mit EWe

und EVe

EW

$$|\psi^{\mp}\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 \mp |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right) \qquad \alpha, \beta$$

$$|\phi^{\mp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |+\rangle_2 \mp |-\rangle_1 |-\rangle_2 \right) \qquad \gamma, \delta$$

Wenn Alice den Wert α erhält dann ist

$$|+\rangle_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(a |+\rangle_3 + b |-\rangle_3 \right)$$

nächstes Mal:

wenn A nicht α misst, muss B noch entsprechend drehen.