Nachtrag letzte Vorlesung

$H = H_A + H_F + H_{int}$

$H_A = \sum_\alpha E_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \xrightarrow[\alpha = g,e]{} -\frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z$ (2 Niveau Atom)

$H_F = \sum_{\vec k, n} \hbar\omega_{\vec k}\left(a^\dagger_{\vec k n} a_{\vec k n} + \frac{1}{2}\right)$ $\omega_{\vec k} = c|\vec k|$ (Summe über alle Farben der Photonen)

$H_{int} = -q\vec r\,\vec E(\vec r)$ $\vec E(\vec r) = \sum_{\vec k n}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\,\vec e_{\vec k n}\left(a_{\vec k n}e^{i\vec k\vec r} + a^\dagger_{\vec k n}e^{-i\vec k\vec r}\right)$

oder $-\frac{q}{mc}\vec p\,\vec A(\vec r)$

Photonenzustand: $|n_{\vec k_1 n_1}, n_{\vec k_2 n_2}, \dots\rangle = \prod_{\vec k, n}\frac{(a^\dagger_{\vec k n})^{n_{\vec k,n}}}{\sqrt{n_{\vec k,n}}}|0,0,0,\dots\rangle$

Dipolnäherung

Wellenlänge λ

$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec k|} \gg a_0$ Bohr'scher Radius

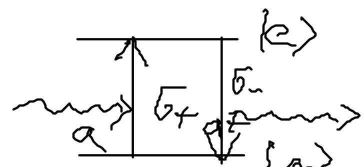
$\Rightarrow$ nur $\vec E(\vec r_0)$ betrachten o.b.d.A. $\vec r_0 = 0$

$$\boxed{H = -\frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z + \sum_{\vec k n}\hbar\omega_k\left(a^\dagger_{kn}a_{kn} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\sum_{\vec k n} g_{kn}\sigma_x\left(a_{kn} + a^\dagger_{kn}\right)}$$

$\hbar g_{kn} = -\vec p_{eg}\,\vec e_{kn}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}$ $\vec p_{eg} = \langle e|q\vec r|g\rangle$

Rotating wave approximation

$\sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \sigma_+ + \sigma_-$ $\sigma_+ = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $\sigma_- = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$



$\sigma_x(a + a^\dagger) = \sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a$

$\sigma_+|g\rangle = |e\rangle$ aber $\sigma_+ a^\dagger$ und $\sigma_- a$

$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sind nie in Resonanz $\Rightarrow$ vernachlässigbar

wichtige Prozesse bei $\omega_{eg} \approx \omega_k$

$$H = -\frac{1}{2}\omega_{eg}\sigma_z + \sum_{kn}\hbar\omega_k\left(a^\dagger_{kn}a_{kn} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\sum_{kn} g_{kn}\left(\sigma_+ a_{kn} + \sigma_- a^\dagger_{kn}\right)$$

Übergangsraten: $P_{g\to e,\; n+1\to n}$ klassisch $P_{e\to g} = P_{g\to e}$

goldene Regel: $P_{e\to g,\; n\to n+1}$ $\Gamma_{e\to g,\; n\to n+1} \neq \Gamma_{g\to e,\; n+1\to n}$ berücksichtigt auch Übergänge im Strahlungsraum

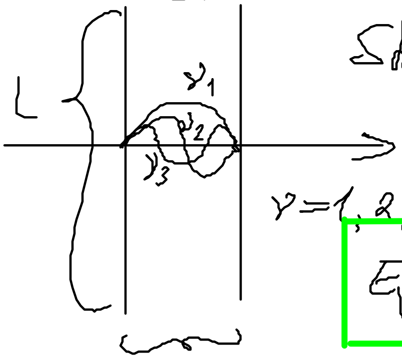
"n" $= |n_{kn_1}, n_{kn_2}, \dots n_{kn}, \dots\rangle$

"n+1" $= |n_{kn_1}, n_{kn_2}, \dots n_{kn}+1, \dots\rangle$

• $E_{vac} = \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_k \frac{1}{2} = \infty$ ist zwar ∞, definiert aber nur den Energie nullpunkt, kann ignoriert werden.

Aber E_{Va} ändert sich, wenn sich das Volumen ändert

⇒ Casimir-Kräfte



Strahlungsfeld zwischen zwei Platten

$\vec{k} = \left(\frac{\nu\pi}{d}, k_y, k_z\right)$ erlaubte k-Werte

$\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\boxed{E_{Vac}(d) = L^2 \hbar c \sum_{\nu=1}^{\infty} \int \frac{dk_y}{2\pi} \int \frac{dk_z}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\nu\pi}{d}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

d Kraft $F = -\frac{\partial}{\partial d} E_{Vac}(d) \overset{!}{=} -\frac{\pi^2 \hbar c L^2}{240\, d^4}$ (anziehend)

nach genügender Regularisierung, d.h. Berücksichtigung der Energien des Außenbereiches.

Casimir-Kraft existiert.

• **Lamb-Shift** Beobachtung ist, dass für H-Atom $E_{2s} \neq E_{2p}$

Störungstheorie 2. Ordnung $T=0$ keine Photonen angeregt

$$\boxed{\delta E_\alpha = \sum_{\beta,k,\lambda} \frac{\langle \alpha | H_{int} | \beta 1_{k\lambda} \rangle \langle \beta 1_{k\lambda} | H_{int} | \alpha \rangle}{E_\alpha - E_\beta - \hbar\omega_k}}$$

("$1_{k\lambda}$" ≙ $n_{k\lambda} = 1$)

$H_{int} = -\frac{q}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A}$ ⇒ $\delta E_\alpha = \infty$ Bethe: führt cutoff ein

$\omega_k \leq \omega_c$

⇒ $\delta E_\alpha = -\frac{2q^2 \omega_c}{3\pi m^2 c^3} \vec{p}^2$ führender divergenter Teil ist nun regularisiert

$\frac{p^2}{2m} + \delta E_\alpha = \frac{p^2}{2m} - C \vec{p}^2 = \frac{p^2}{2m_{obs}}$ wir erhalten renormierte

Masse, hängt von künstl. eingeführtem cutoff ab??

Die Korrektur ist immer da und die beobachtete (observed) Masse enthält immer diese Korrektur. Absorbiere dies in Def. von m. Reduce daher $\delta E_\alpha + C \langle \alpha | \vec{p} | \alpha \rangle$ aus

⇒ Dies ist „regulär", hängt nur noch logarithmisch von ω_c ab

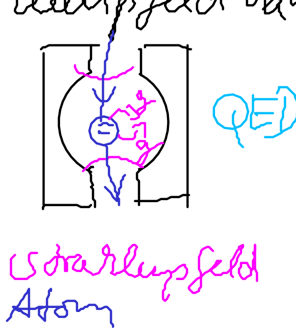
sehr schwache Abhängigkeit.

$$\Rightarrow \frac{\Omega E_\alpha}{2\pi\hbar} \approx 1040\ \mathrm{MHz} \;\hat{=}\; (E_{2s} - E_{2p})\frac{1}{2\pi\hbar}$$

- **Jenseits Dipolnäherung** $\Rightarrow$ „elektr. Dipolübergänge entwickle $e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)}$"
  $\Rightarrow$ Quadrupol und magnet. Übergänge
- **Lichtstreuung** $|\alpha\ 1_{\vec{k}\eta}\rangle \longrightarrow |\beta\ 1_{\vec{k}'\eta'}\rangle$

4.4 Jaynes – Cummings – Modell

Ein 2 Niveau-Atom WW mit 1-Mode Strahlungsfeld nahe Resonanz, RWA



$$H = -\frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \underbrace{\hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)}_{H_{int}}$$

Eigenwertproblem

Basis: $|g,n\rangle$, $|e,n\rangle$ $\quad n = 0,1,2,\dots$

Die einzigen nicht verschwindende Matrixelemente

$$\langle e,n|H_{int}|g,n+1\rangle = \hbar g\sqrt{n+1}$$

$$\langle g,n+1|H_{int}|e,n\rangle = \hbar g\sqrt{n+1}$$

Zustände $(|g,0\rangle, |e,0\rangle, |g,1\rangle, |e,1\rangle, \dots)$

$$\Rightarrow H = \hbar\begin{pmatrix} -\frac{\omega_{eg}}{2} & 0 & & & & \\ 0 & \frac{\omega_{eg}}{2} & g & & & \\ & g & -\frac{\omega_{eg}}{2}+\omega & & & \\ & & & \frac{\omega_{eg}}{2}+\omega & \sqrt{2}g & \\ & & & \sqrt{2}g & -\frac{\omega_{eg}}{2}+2\omega & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \nu=1 \\ \\ \nu=2 \\ \\ \\ \end{array}$$

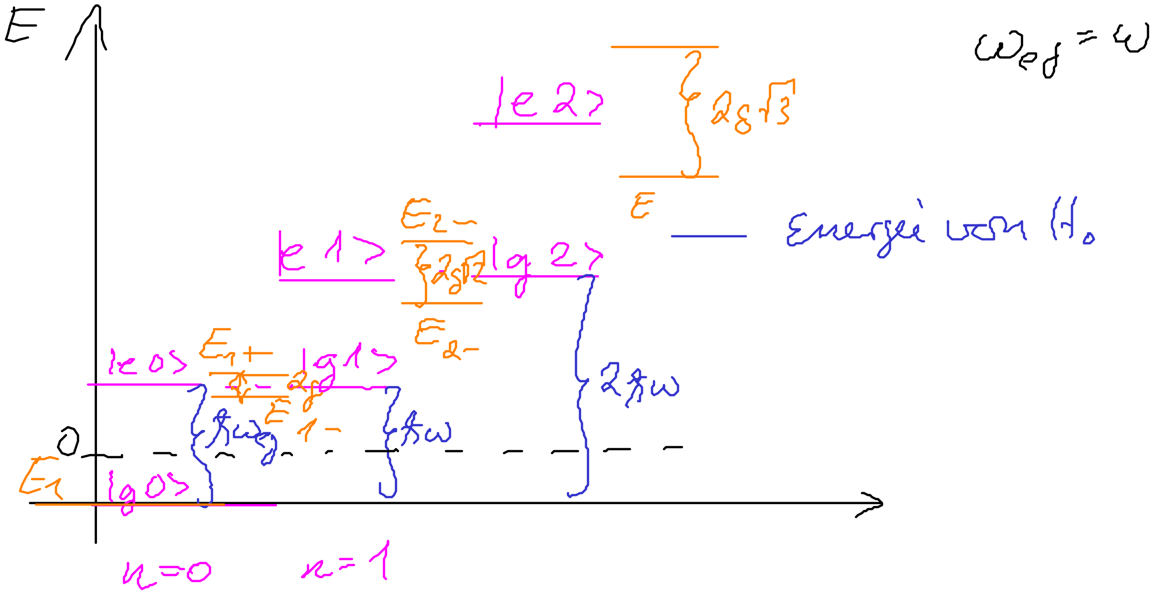
$$E_0 = -\frac{\omega_{eg}}{2}\hbar \qquad |\psi_0\rangle = |g,0\rangle$$

Block $\nu = 1,2,\dots$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\omega_{eg}}{2} + (\nu-1)\omega - \frac{E}{\hbar} & \sqrt{\nu}\,g \\ \sqrt{\nu}\,g & -\frac{\omega_{eg}}{2} + \nu\omega - \frac{E}{\hbar} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow E_{\nu,\mp} = \hbar\left(\nu - \tfrac{1}{2}\right)\omega \mp \tfrac{1}{2}\hbar\Omega_\nu$$

$$\Omega_\nu = \sqrt{4g^2\nu + (\omega_{eg}-\omega)^2}$$



Charakteristische Energieaufspaltung $\sim 2g\sqrt{n}$

"Vacuum Rabi Splitting"

Nachweis in aktuellen Experimenten (2004)