$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta m c^2 \right) \psi$$

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \;, \quad x^\mu = (ct, \vec{x})$$

Raum - Zeit - Raum

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\nu$$

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & \end{pmatrix} \qquad \sigma^1 = \sigma_x \quad \sigma^2 = \sigma_y \quad \sigma^3 = \sigma_z \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Spinor - Raum

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$\rho = \psi^+ \psi = \sum_{n=1}^{N} \psi_\nu^* \psi_\nu$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$j^k = c \psi^+ \alpha^k \psi$$

(Kontinuitätsgleichung umschreiben)

$$j_0 = c\rho \quad \Rightarrow \quad j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

$$\rightarrow \partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} j_0 + \frac{\partial}{\partial x^k} j^k = 0$$

Dirac-Gleichung in kovarianter Form

$$0 = -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi - i \alpha^k \psi + \beta \frac{mc}{\hbar} \psi \quad \Big| \cdot \beta$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -i \left(\beta \partial_0 + \beta \alpha^k \partial_k \right) \psi + \frac{mc}{\hbar} \psi$$

$$\gamma^0 \equiv \beta \;, \quad \gamma^k = \beta \alpha^k$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \left(-i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi$$

$$\left[\frac{1}{\text{Länge}}\right] + \left[\frac{1}{\text{Länge}}\right]$$ Compton - Wellenlänge

Eigenschaften der γ - Matrizen

$\gamma^{0+} = \gamma^0$ hermitesch $\qquad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$

$\gamma^{k+} = -\gamma^k$ antihermitesch $\qquad (\gamma^k)^2 = \mathbb{1}$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$ Metrischer Tensor

Standarddarstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

Def. $\not{v} = \gamma \cdot v = \gamma^\mu v_\mu = \gamma_\mu v^\mu = \gamma^0 v_0 - \vec{\gamma}\vec{v}$

Vektor

$$\longrightarrow \quad \left(-i \not{\partial}_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0$$

Erhalten mit $\hbar = c = 1$

$$\left(-i \not{\partial}_\mu + m \right) \psi = 0$$

Für Elektronen: Compton-Wellenlänge

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c} = 3{,}8 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$ (sehr kurz)

$$m_e c^2 = 0{,}51 \text{ MeV}$$ (große Energie)

Ruhende Teilchen

$\vec{k} = 0$ bzw. räuml. konst.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \beta m c^2 \psi$$

$\psi \propto e^{i k^\mu x_\mu}$, aber $k = 0$

nur zeitabh.

4 Lösungen

$$\psi_1^{(+)} = e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \psi_2^{(+)} = e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_1^{(-)} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \Big| \qquad \psi_2^{(-)} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2 entartete Lösungen ψ_r^+ $(r=1,2)$ mit pos Energie

2 " " ψ_r^- $(r=1,2)$ mit negativer Energie

$\psi^{(+)}$ Teilchen | $r = 1,2$ entspricht dem

$\psi^{(-)}$ Antiteilchen | Spin

ψ ist 4er Spinor ($2 \cdot 2$ Spin $\otimes$ Teilchen/Antiteilchen)

6.3 Kopplung an das el. mag. Feld

minimale Kopplung

$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ (cgs!) $e = q$ Ladung, Elektron hat $q = -|e|$

+ elektr. Potential

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[c\alpha^k\left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right]\psi$$

$p_k = \frac{\hbar}{i}\partial_k$; $A_1 = A_x, \ldots$

Zerlege 4er Spinor $\psi = \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix}$ mit $\tilde{\varphi}, \tilde{\chi}$ je 2er Spinor

def. $\vec{\pi} = (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})$

große Energie

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\vec{\pi}\,\tilde{\chi}\\ \vec{\sigma}\vec{\pi}\,\tilde{\varphi}\end{pmatrix} + e\Phi\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\tilde{\chi}\end{pmatrix}$$

weil α^k nebendiagonal im Teilchen / Antiteilchen-Raum

Wir wollen den nicht-relativistischen Grenzfall:

suche Teilchen mit pos. Energie

Spalte führende Zeitabhängigkeit ab

$$\begin{pmatrix}\tilde\varphi\\ \tilde\chi\end{pmatrix} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$$

einsetzen:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\vec\sigma\,\vec\pi\,\chi\\ \vec\sigma\,\vec\pi\,\varphi\end{pmatrix} + e\phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}$$

Aus der unteren Gleichung folgt (dominante Terme)

$$c\,\vec\sigma\vec\pi\,\varphi \approx 2mc^2\,\chi$$

einsetzen in obere Gleichung ($\chi = \dots$)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{1}{2m}(\vec\sigma\cdot\vec\pi)(\vec\sigma\cdot\vec\pi) + e\Phi\right]\varphi$$

Pauli-Gleichung

Es gilt $\sigma^i\sigma^j = \delta_{ij} + i\,\varepsilon^{ijk}\sigma^k$

δ_{ij} Kronecker-Delta

total antisymm. Tensor 3. Stufe

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{bei } ijk = (1,2,3) \text{ und zykl} \\ -1 & \text{für } ijk = (2\,1\,3) \text{ usw} \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (\vec\sigma\cdot\vec a)(\vec\sigma\cdot\vec b) = \sum_{ij}\sigma^i a_i\,\sigma^j b_j = \vec a\vec b + i\,\vec\sigma(\vec a\times\vec b)$$

$$\Rightarrow (\vec\sigma\vec\pi)(\vec\sigma\vec\pi) = \vec\pi^2 + i\,\vec\sigma(\underbrace{\vec\pi\times\vec\pi}_{\neq 0})$$ *

$\neq 0$ da Operator

$$(\vec\pi\times\vec\pi)\varphi = \frac{\hbar}{i}\left(-\frac{e}{c}\right)\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_k - A_k\partial_j)\varphi$$

$$= i\hbar\frac{e}{c}\underbrace{\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_k)}_{\vec B = \text{rot}\,\vec A}\varphi = i\hbar\frac{e}{c}B^i\varphi$$

$$* \quad = \vec{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{c} \vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + e\phi\right]\varphi$$

Pauli - Gleichung für Elektron mit Spin $1/2$

φ ist 2-komp. Spinor

und wir erhalten als Ergebnis den gyromagnet. Faktor $g = 2$

(zerlegen)

$$H_{spin} = -\frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = -\vec{\mu}_{spin}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{\mu}_{spin} = g\frac{e}{2mc}\vec{S} \quad , \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$$= \frac{e}{2mc}\vec{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad g = 2$$

zum Vergleich: Bahn - magn. Moment

Für $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{x}$ $\quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$, $\quad \text{div}\,\vec{A} = 0$

$$\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$$

gem. Term

$$-\frac{1}{m}\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{p} = -\frac{e}{2mc}(\vec{B}\times\vec{x})\cdot\vec{p}$$

$$= -\frac{e}{2mc}(\vec{x}\times\vec{p})\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 - 2\frac{e}{2mc}\vec{S}\cdot\vec{B} + e\phi$$

$$p_k - \frac{e}{c}A_k = \frac{\hbar}{i}\partial_k - \frac{e}{c}A_k$$

Def. $A_0 = \phi$

Fehler 2

$$\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\phi = -\frac{\hbar}{i}\partial_0 - \frac{e}{c}A_0$$

$\longrightarrow$ Dirac

$$\left[-\gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu\right) + mc\right] \psi = 0$$

Dirac-Gl. ist invariant unter Eichtransformation

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$$

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)} \psi(x)$$