$$\boxed{\begin{array}{l} i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\alpha^k \partial_k + \beta m c^2\right)\psi \qquad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \quad x^\mu = (ct, \vec{x}) \\ E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \qquad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \\ \alpha^k = \begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ \sigma^k & 0\end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix}\mathbb{1}&0\\0&-\mathbb{1}\end{pmatrix} \quad \sigma^1=\sigma_x,\ \sigma^2=\sigma_y,\ \sigma^3=\sigma_z \\ \psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \quad \rho = \psi^+\psi = \sum_{n=1}^{4} \psi_n^*\psi_n,\ j^\alpha = c\psi^+\alpha\psi \end{array}}$$

**Def:** $j^0 = c\rho$ $\qquad j^\mu = (c\rho, \vec{j})$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}j^0 + \frac{\partial}{\partial x^k}j^k = 0}$$

## Dirac Gleichung in kovarianter Form

$$0 = -\frac{i\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi - i\beta\alpha^k\partial_k\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi$$

$$0 = -i\left(\beta\partial_0 + \beta\alpha^k\partial_k\right)\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi$$

**Def:** $\gamma^0 = \beta$ ; $\gamma^k = \beta\alpha^k$

$$\boxed{0 = \left(-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi}$$

**Eigenschaften der $\gamma$-Matrizen:** $\underbrace{\gamma^{0+} = \gamma^0}_{\text{hermitesch}}$, $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$, $\underbrace{\gamma^{k+} = -\gamma^k}_{\text{antihermitesch}}$, $(\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1&&&0\\&-1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{pmatrix}$$

**Standarddarstellung** $\gamma^0 = \begin{pmatrix}\mathbb{1}&0\\0&-\mathbb{1}\end{pmatrix}$ $\qquad \gamma^k = \begin{pmatrix}0&\sigma^k\\-\sigma^k&0\end{pmatrix}$

**Def:** $\not{V} = \gamma V = \gamma^\mu V_\mu = \gamma_\mu V^\mu = \gamma^0 V_0 - \vec{\gamma}\vec{V}$ (Vektor)

$\Rightarrow \boxed{\left(-i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$ $\qquad$ Einheiten, $\hbar = c = 1$ $\qquad \boxed{\left(-i\not{\partial} + m\right)\psi = 0}$

**Für Elektronen** $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c} = 3{,}8\cdot 10^{-11}\,\text{cm}$ Compton Wellenlänge

$m_e c^2 = 0{,}51\ \text{MeV}$

## Ruhende Teilchen

$\psi \propto e^{ik^\mu x_\mu}$ ; $k^\alpha = 0$ ; $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \beta mc^2\psi$

hat 4 Lösungen

$$\psi_1^{(+)} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \psi_2^{(+)} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi_1^{(-)} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \psi_2^{(-)} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2 entartete Lösungen $\left\{\begin{matrix}\psi_r^{(+)}\\ \psi_r^{(-)}\end{matrix}\right\}$ $(r = 1,2)$ mit $\left\{\begin{matrix}\text{positiver}\\ \text{negativer}\end{matrix}\right\}$ Energie.

Die Lösungen mit $r = 1$ und $2$ beziehen sich auf 2 Spinkomponenten

$\psi$ = 4er Spinor (wegen Teilchen und Antiteilchen)

## 6.3 Kopple an das elektromagnet. Feld

minimale Kopplung: $\vec{p} \to \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$  Ladung $q = -|e|$

+ elektrisches Potential

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-c\alpha^k\left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right)\Psi} \quad p_k = \frac{\hbar}{i}\partial_k, \; A_1 = A_k$$

Zerlege 4er Spinor $\Psi = \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix}$ mit $\tilde{\varphi}, \tilde{\chi}$ jeweils 2er Spinoren

**Def** $\vec{\pi} = (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\tilde{\chi}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\tilde{\varphi}\end{pmatrix} + e\Phi\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} + \underbrace{mc^2\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\tilde{\chi}\end{pmatrix}}_{\text{große Energie}}}$$

weil $\alpha^k$ nebendiagonal ist in Teilchen-Antiteilchen

**Nichtrelativistischer Grenzfall**

- Suche Teilchen mit positiver Energie, spalte führende Zeitabh. ab.

$$\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \quad \text{einsetzen} \Rightarrow$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\chi\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\varphi\end{pmatrix} + e\Phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}$$

Aus der „unteren" Gleichung folgt: $c\,\vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi \approx 2mc^2\chi$ einsetzen $\Rightarrow$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}) + e\Phi\right)\varphi} \quad \text{Pauli Gleichung}$$

**Es gilt:** $\sigma^i\sigma^j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ und $\boxed{\varepsilon^{ijk} = \begin{cases}1 & \text{für } i,j,k = 1,2,3 \text{ oder gerade Permutation}\\ -1 & \text{für } i,j,k = 2,1,3 \text{ oder ungerade Perm.}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}}$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \sum_{ij}\sigma^i a_i\,\sigma^j b_j = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma}\vec{\pi})(\vec{\sigma}\vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 + i\vec{\sigma}(\vec{\pi}\times\vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

mit $(\vec{\pi}\times\vec{\pi})^i\varphi = \frac{\hbar}{i}\left(-\frac{e}{c}\right)\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_k - A_k\partial_j)\varphi = i\frac{\hbar e}{c}\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_k)\varphi = i\frac{\hbar e}{c}B^i\varphi$ ← i-te Komponente

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + e\Phi\right)\cdot\varphi} \quad \text{Pauli Gleichung}$$

Für Elektronen mit Spin $\frac{1}{2}$, $\varphi$ ist 2-komponentiger Spinor und wir erhalten als Ergebnis gyromagnetischer Faktor $g = 2$.

$$\boxed{H_{Spin} = -\frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = -\vec{\mu}_{Spin}\cdot\vec{B}} \quad \vec{\mu}_{Spin} = g\frac{e}{2mc}\vec{S} \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$$= \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma} \Leftrightarrow g = 2$$

**Zum Vergleich Bahn-magn. Moment**

Für $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{x}$ mit $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, div $\vec{A} = 0$  $\quad \vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$

gemischter Term: $-\frac{e}{mc}\vec{A}\cdot\vec{p} = -\frac{e}{2mc}(\vec{B}\times\vec{x})\cdot\vec{p} = -\frac{e}{2mc}(\vec{x}\times\vec{p})\cdot\vec{B}$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 - 2\frac{e}{2mc}\vec{S}\cdot\vec{B} + e\Phi}$$

$g = 2$ explizit

**Def:** $A_0 = \Phi$

$p_k - \frac{e}{c}A_k = \frac{\hbar}{i}\partial_k - \frac{e}{c}A_k$ , $\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\Phi = -\frac{\hbar}{i}\partial_0 - \frac{e}{c}A_0$

$\Rightarrow$ Dirac Gleichung $\boxed{\left(-\gamma^\mu\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) + mc\right)\psi = 0}$

ist invariant unter Eichtransformation

$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$ und $\psi(x) \longrightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)}\psi(x)$