6.9 Foldy-Wouthuysen-Transformation (Wdh.)

$c = \hbar = 1$

$\psi = e^{-iS}\psi' \longrightarrow H' = e^{iS} H e^{-iS} - e^{iS}(i\partial_t e^{-iS})$

freies Teilchen $H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m$

$e^{\mp iS} = \exp\left(\pm \beta \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\vartheta\right)$ mit $\mathrm{tg}(2\vartheta) = \frac{|\vec{p}|}{m}$

$\Rightarrow H' = \beta\sqrt{m^2+p^2}$ $\qquad iS \approx \beta \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{2m}$

Teilchen im el-mag. Potential

$$H = \underbrace{\vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r},t))}_{\mathcal{O}\text{ (odd)}} + \underbrace{\beta m}_{\text{führend}} + \underbrace{e\phi(\vec{r})}_{\mathcal{E}\text{ (even)}}$$

Ansatz $iS = \frac{\beta\mathcal{O}}{2m}$

für $\vec{p} - e\vec{A}$ macht man die Transformation mehrfach

$\Rightarrow$ jedes mal wird es besser

Ergebnis $H' = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\underbrace{[\mathcal{O},\mathcal{E}]}_{\text{immer noch ungerade, aber kleiner}} + \dots$

noch mal TraFo mit $\mathcal{O}' = \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}]$

$\Rightarrow H'' = \dots$ $\qquad$ immer noch $\mathcal{O}'' \neq 0$

noch mal $\qquad iS'' = \frac{\beta\mathcal{O}''}{2m}$

H''' enthält in ausreichender Genauigkeit (in Entwicklung in $\frac{1}{m}$) keine ungeraden Terme mehr.

$\Rightarrow$ Jetzt können wir uns auf den Teilchensektor beschränken

$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi$ — 2er Spinor Teilchen, 0 — 2er Spinor Antiteilchen mit $H''' = H_{eff}$ (im Teilchensektor)

$$H_{eff} = \underbrace{mc^2 + e\phi(\vec r) + \frac{1}{2m}(\vec p - e\vec A)^2 - \frac{e\hbar}{2m}\vec\sigma\cdot\vec B}_{\text{Pauli-Hamilton} \;=\; H_0}$$

$$\underset{H_1}{-\frac{p^4}{8m^3c^2}} \underset{H_2}{-\frac{e}{4m^2c^2}} \vec\sigma\cdot\left(\vec E \times (\vec p - e\vec A)\right) \underset{H_3}{-\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div}\vec E}$$

H_1 relativistische Korrektur von Entwicklung

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots$$

H_2 Spin-Bahn Kopplung

a) Sonderfall $\vec A = 0$ $\quad \vec E = -\nabla\phi$ für zentralsymm. Pot.

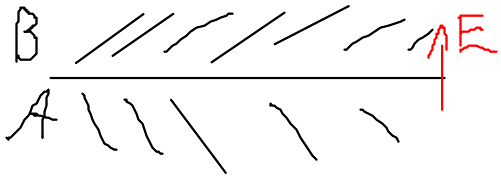
$$\longrightarrow \quad \vec E = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec r$$

$$\Rightarrow \quad H_2 = \frac{e}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec\sigma\cdot(\vec r \times \vec p)$$

$$\propto \vec S\cdot\vec L$$

b) Sonderfall

$\vec E = E\hat e_z$ z.B. in Heterostrukturen mit Grenzschicht



2 dim. Elektronengase

$$\Rightarrow \quad H_2 = a\,\vec\sigma\cdot(\vec e_z \times \vec p) = a\,\vec\sigma\cdot\begin{pmatrix}-p_y\\ +p_x\\ 0\end{pmatrix} = a(\sigma_y p_x - \sigma_x p_y)$$

kann durch E kontrolliert werden

$\Downarrow$

Spin-manipulation möglich

Rashba-Spin-Bahn-Kopplung

$$H_3 = -\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div}\vec E \qquad \lambda_c = \frac{\hbar}{mc} \quad \text{Compton-Wellenlänge}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V = \frac{\lambda_c}{8}\nabla^2 V \quad , \; V = e\phi$$

Elektron sitzt nicht nur im Grundzustand, sondern hat Ortsunschärfe

$\Rightarrow$ "Zitterbewegung" um $\Delta x^2 \sim \lambda_c^2$

führt zu Energieerhöhung

VII Addition von Drehimpulsen

7.1 Clebsch-Gordon-Koeff

(Gordon hatte eine Doktorantin: Emmy Noether)

Wdh. (aus QM 1)

Für Drehimpulse gelten die Vertauschungsrelationen

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad \text{und zykl.}$$

$\Rightarrow$ Eigenwertproblem

$$J^2 |k, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |k, j, m\rangle$$

$$J_z |k, j, m\rangle = \hbar m |k, j, m$$

j ganz oder halbzahlig

k steht für weitere mit J^2 und J_z vertauschende Variablen

Alle Matrixelemente von $\vec{J}$ oder $f(\vec{J})$ sind unabh. von k

Es gilt für $J_\pm = J_x \pm i J_y$

$$J_\pm |k, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |k, j, m \pm 1\rangle$$

$$J_+ |k, j, j\rangle = 0 \qquad J_- |k, j, -j\rangle = 0$$

Zu gegebenem k und j ist der Hilbertraum $\mathcal{H}(k, j)$ $(2j+1)$ dimensional $\left(\dim(\mathcal{H}(k, j)) = 2j+1\right)$

Betrachte System mit 2 Drehimpulsen $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ und Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

(z.B. 2 Spins $\rightarrow$ Triplet, Singulett oder Bahn + Spin)

$\Rightarrow \quad [J_x, J_y] = i\hbar J_z$ und zykl.

$[J^2, J_z] = 0$

Außerdem $[J_z, J_1^2] = 0 = [J_z, J_2^2]$

$[J^2, J_1^2] = 0 = [J^2, J_2^2]$

aber $[J_{1z}, J^2] \neq 0 \neq [J_{2z}, J^2]$

Ein Satz von vertauschenden Observablen haben eine gemeinsame Basis

$|J, M, j_1, j_2\rangle$

$J^2 |\cdots\rangle = \hbar^2 J(J+1)|\cdots\rangle$

usw.

Die Zustände $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ bilden eine Basis in einem $(2j_1+1)\cdot(2j_2+1)$ dimensionalen Hilbertraum

$$|J, M, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1; j_2, m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle}_{\text{C-G - Koeff.}}$$

($\hbar$ nicht explizit notiert)

Was sind die Eigenwerte von J^2 und J_z

Bsp. $2 \cdot$ Spin $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $J = 1$ oder $J = 0$

Bahn + Spin $\Rightarrow$ $J = l \pm \frac{1}{2}$

$J_z = J_{1z} + J_{2z}$ $\quad$ J_z hat EW $m_1 + m_2 = M$

$\Rightarrow$ der Wert $M = j_1 + j_2$ ist möglich

$\Rightarrow J = j_1 + j_2$ ist möglich

Bed. weitere Werte von J sind $j_1 + j_2 - 1$
usw bis $j_1 - j_2$
(für $j_1 \geq j_2$)

Begründung

$J = j_1 + j_2 \Rightarrow M = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, -j_1 - j_2$
$2(j_1 + j_2) + 1$ verschiedene M-Zustände

$J = j_1 + j_2 - 1 \Rightarrow 2(j_1 + j_2 - 1) + 1$ versch. M-Zustände

$\vdots$

$J = j_1 - j_2 \Rightarrow 2(j_1 - j_2) + 1$ versch. M-Zustände

Gesamtzahl

$$\sum_{J = j_1 - j_2}^{j_1 + j_2} (2J + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

$J = j_1 - j_2 + i$

$$NR = \sum_{i=0}^{2j_2} [2(j_1 - j_2 + i) + 1] = (2j_2 + 1)[2(j_1 - j_2) + 1] + 2\,\frac{2j_2(2j_2 + 1)}{2}$$

Konstruktion der Zustände:

$|J, M, j_1, j_2\rangle = |J, M\rangle$ Notation

Der Zustand $|J = j_1 + j_2, M = J\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$
gibt es nur einmal

Den Zustand $|J, M = J - 1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2J}} J_- |J, J\rangle$
erhält man durch Absteigen mit $J_- = J_x - i J_y$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2J}} (J_{1-} + J_{2-}) |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2J}} \Big(\hbar \sqrt{j_1(j_1+1) - j_1(j_1-1)}\, |j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle$$

$$+ \hbar \sqrt{j_2(j_2+1) - j_2(j_2-1)}\, |j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\, |j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\, |j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle$$

weiteres Absteigen ergibt die anderen $|J, M\rangle$ Zustände.

Finde $|J-1, J-1\rangle$