$\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$

Basis $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$

$|J, M, j_1, j_2\rangle = \sum \sum C_{\substack{JM \\ j_1 j_2}} \; |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$

$J = j_1 + j_2, \; j_1 + j_2 - 1, \; \dots, \; |j_1 - j_2|$

$M = -J, -J+1, \dots, +J$

$J_- = J_x - iJ_y \qquad J_-|J, M\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - M(M-1)}\,|J, M-1\rangle$

$J_- = J_{1-} + J_{2-}$

$|J = j_1 + j_2, M = J\rangle = |j_1, m_1 = j_1; j_2, m_2 = j_2\rangle$

$|J = j_1 + j_2, M = J-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}\,|j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle$

$+ \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}\,|j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle$

$\Rightarrow$ Zustände mit $J = j_1 + j_2$

bis $|J = j_1 + j_2, M = -J\rangle = |j_1, -j_1; j_2, -j_2\rangle$

nächster Unterraum $J = j_1 + j_2 - 1$

Zustand mit maximalem $M = j_1 + j_2 - 1$ ist Linearkomb.

$|J = j_1 + j_2 - 1, M = J\rangle = \alpha\,|j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle + \beta\,|j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle$

Normierung: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

muss orthogonal zu $|J = j_1 + j_2, M = J-1\rangle$ sein:

$\Rightarrow \alpha \cdot \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} + \beta\sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} = 0$, wähle α, β reell

$\alpha > 0$

$$\Rightarrow |J=j_1+j_2, M=J\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\, |j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle - \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\, |j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle$$

Anwenden von J_- liefert die restlichen Zustände

Unterraum $J = j_1 + j_2 - 2$

$$|J=j_1+j_2-2, M=J\rangle = \alpha\, |j_1, j_1; j_2, j_2-2\rangle + \beta\, |j_1, j_1-1; j_2, j_2-1\rangle + \gamma\, |j_1, j_1-2; j_2, j_2\rangle$$

Normierung & orthogonalisieren $\Rightarrow \alpha, \beta, \gamma$

7.2. Wigner - Eckart - Theorem und g - Faktor

wir hatten gesehen, dass Vektoroperatoren $\vec{V}$ mit dem Gesamtdrehimpuls die Vertauschungsrelation

$$[J_x, V_x] = 0$$
$$[J_x, V_y] = i\hbar V_z \quad \text{und zykl.}$$

Basis $|k, j, m\rangle$ mit $J|k, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|k, j, m\rangle$ usw.

daraus folgt (Cohen Tannoudji § 10.7)

$$\langle k, j, m|\vec{V}|k, j, m'\rangle = \alpha(k, j)\, \langle k, j, m|\vec{J}|k, j, m'\rangle$$

hängt nicht von m, m' und nicht von Vektorkomponente ab.

W. - E. - Theorem

Ausdruck für $\alpha(k, j)$

wir arbeiten im Unterraum $\mathcal{H}(k, j)$

definiere Projektionsoperator $P(k, j)$ auf diesen Unterraum

umschreiben des W. E. Theorems

$$P(k,j)\, \vec{V}\, P(k,j) = \alpha(k,j)\, P(k,j)\, \vec{J}\, P(k,j)$$

Es gilt $[P(k,j), \vec{J}\,] = 0$ (nachrechnen durch anwenden auf Zustände)

$$P(k,j)\,\vec{J}\cdot\vec{V}\,P(k,j) = \vec{J}\cdot P(k,j)\,\vec{V}\,P(k,j)$$

$$= \alpha(k,j)\,\vec{J}\cdot P(k,j)\,\vec{J}\,P(k,j) = \alpha\,\vec{J}^2\,P(k,j)$$

$P^2 = P$ wie bei allen Projektionen

$$= \alpha\,\hbar^2\,j(j+1)\;P(k,j)$$

nochmal anders W-E-T:

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_{kj} = \alpha(k,j)\,\hbar^2\,j(j+1)$$

Erwartungswert in Unterraum $\mathcal{H}(k,j)$

$$\Rightarrow \quad \alpha(k,j) = \frac{\langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_{jk}}{\hbar^2\,j(j+1)} = \frac{\langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_{kj}}{\langle \vec{J}^2\rangle_{kj}}$$

Im Unterraum $\mathcal{H}(k,j)$ gilt

$$\boxed{\vec{V} = \frac{\langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_{kj}}{\langle J^2\rangle_{kj}}\cdot\vec{J} \qquad \text{Projektionstheorem}}$$

g - Landé - Faktor

Zentralsymmetr. Potential

$$[H_0, J^2] = [H_0, J_z] = 0$$

$$= [H_0, L^2] = [H_0, S^2] = [\vec{J}^2, J_z]$$

$\Rightarrow$ gem. Satz von Eigenzuständen

$$|\underbrace{E_0, L, S}_{=k}, J, M\rangle$$

+ Magnetfeld $\quad H_1 = \omega_L\,(L_z + 2S_z)$

$$\omega_L = -\frac{q}{2m}B$$

Beh. $\quad H_1 = g_J\,\omega_L\,J_z \qquad \Rightarrow$ Aufspaltung in äquidistante Niveaus

Bew: Im Unterraum $\mathcal{H}(E_0, L, S, J)$ gilt

$$\vec{L} = \frac{\langle \vec{L}\cdot\vec{J}\rangle_{E_0LS}}{\hbar^2 J(J+1)}\,\vec{J} \quad \text{und} \quad \vec{S} = \frac{\langle \vec{S}\cdot\vec{J}\rangle_{E_0LS}}{\hbar^2 J(J+1)}\,\vec{J}$$

und $\langle \vec{L}\cdot\vec{J}\rangle_{E_0LS} = \langle \vec{L}\cdot(\vec{L}+\vec{S})\rangle_{E_0LS}$

$$= \langle \vec{L}^2 + \tfrac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)\rangle$$

$$= \hbar^2\left(L(L+1) + \tfrac{1}{2}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]\right)$$

analog $\langle \vec{S}\cdot\vec{J}\rangle_{E_0LS} = \hbar^2\left(S(S+1) + \tfrac{1}{2}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]\right)$

$\Rightarrow$ im Unterraum $\mathcal{H}(E_0, L, S, J)$

$$H_1 = \omega_L (L_z + 2S_z)$$

$$= \omega_L \left(\frac{J_z}{\hbar^2 J(J+1)}\,\hbar^2\left(L(L+1) + 2S(S+1) + \left(\tfrac{1}{2}+1\right)[\ldots]\right)\right)$$

$$= \omega_L J_z \left[\frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}\right]$$

also
$$\boxed{g_J = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}}$$

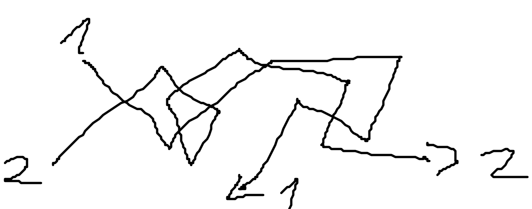
$S = 0 \Rightarrow J = L \Rightarrow g = 1$

$L = 0 \Rightarrow J = S \Rightarrow g = 2$

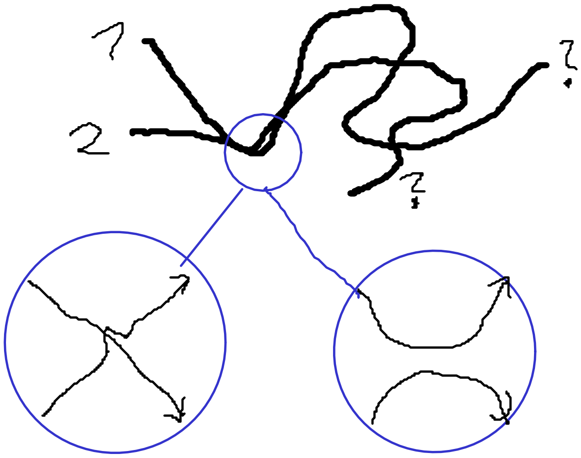
Kap VIII Bosonen & Fermionen

Ununterscheidbare Teilchen

8.1 Klassische Physik: Teilchen können im Prinzip immer unterschieden werden (z.B. durchnummerieren)



In QM sind identische Teilchen, deren WF
irgendwo überlappt nicht mehr unterscheidbar



Was passiert?
beide möglich!

Betr. qm. 2 Teilchen, die gedanklich nummeriert sind (1) und (2) in qm Zustände

$n_1, n_2 \to$ Zustände $|n_1^{(1)}\rangle |n_2^{(2)}\rangle = |1:n_1; 2:n_2\rangle$
$\hat{=}\ \psi_{n_1}(r^{(1)})\ \psi_{n_2}(r^{(2)})$

dieser ist nicht zu unterscheiden von Zustand

$$|n_2^{(1)}\rangle|n_1^{(2)}\rangle = |1:n_2; 2:n_1\rangle \hat{=} \psi_{n_2}(r^{(1)})\ \psi_{n_1}(r^{(2)})$$

Die beiden sind durch den Permutationsoperator verknüpft:

$$P_{12}|1:n_1; 2:n_2\rangle = |2:n_1; 1:n_2\rangle$$

$\Rightarrow P_{12}^2 = \mathbb{1} \quad \Rightarrow$ EW ist ± 1

Hamilton ununterscheidbarer Teilchen

z.B. $$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$\Rightarrow [H, P_{12}] = 0$

$\Rightarrow \exists$ gemeinsame Basis von H und P aber weder $|1:m_1 ; 2:m_2\rangle$ noch $|2:m_1 ; 1:m_2\rangle$

sind keine Eigenzustände !

Jedoch sind $|\psi_{\substack{S\\A}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:m_1 ; 2:m_2\rangle \pm |2:m_1 ; 1:m_2\rangle\right)$

sind Eigenfkt mit

$$P_{12}\,|\psi_{\substack{S\\A}}\rangle = \pm\,|\psi_{\substack{S\\A}}\rangle$$

beide Vorzeichen kommen in der Welt vor !

Beide Vorzeichen kommen vor

$|\psi_S\rangle$, $+$ Bosonen

^4He-Kern, Photonen

$|\psi_A\rangle$, $-$ Fermionen

Elektr., Protonen, Neutronen,