Zum idealen Bose-Gas:

$$\sum_{n_\lambda=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)n_\lambda} = \frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}}$$

nur für $\boxed{\varepsilon_\lambda > \mu}$ $\Rightarrow$ $\beta(\varepsilon_\lambda-\mu) > 0$

$$Z_G = \sum_{\{n_\lambda\}} e^{-\beta\sum_\lambda n_\lambda(\varepsilon_\lambda-\mu)} \Rightarrow W_{\{n_\lambda\}} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta\sum_\lambda n_\lambda(\varepsilon_\lambda-\mu)}$$

$$W_{\lambda_1}(n_{\lambda_1}) = \sum_{\{n_\lambda,\lambda\neq\lambda_1\}} \frac{1}{\prod_\lambda Z_\lambda} \prod_{\lambda\neq\lambda_1} Z_\lambda\, e^{-\beta n_{\lambda_1}(\varepsilon_{\lambda_1}-\mu)}$$

$$= \frac{1}{Z_{\lambda_1}} e^{-\beta n_{\lambda_1}(\varepsilon_{\lambda_1}-\mu)}$$

$$\langle n_\lambda\rangle = \frac{1}{Z_\lambda}\sum_{n_\lambda} n_\lambda e^{-n_\lambda x}$$

$x := \beta(\varepsilon_\lambda-\mu)$

$Z_\lambda = \frac{1}{1-e^{-x}}$

$$= (1-e^{-x})(-1)\frac{\partial}{\partial x}\sum e^{-n_\lambda x}$$

$$= (e^{-x}-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) = (e^{-x}-1)(-1)\frac{1}{(1-e^{x})^2}e^{-x}$$

$$= \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \boxed{\frac{1}{e^x-1}}$$

Bose-Funktion

(Bild auf Folie)

$$n_B = \frac{1}{e^x-1}$$

$x \ll 1$ $\quad n_B = \frac{1}{1+x+\dots-1} \approx \frac{1}{x}$

$x \gg 1$ $\quad n_B \approx e^{-x}$ $\quad\hat{=}$ Maxwell Boltzmann-Gas

Für hohe Temp. ist $\mu \ll 0$

so dass $\frac{1}{kT}(\varepsilon_\lambda - \mu) \gg 1$

Fermi-Gas : Pauli Verbot bedeutet $n_\lambda \in \{0; 1\}$

$z_\lambda = 1 + e^{-x}$

$$W_\lambda(n_\lambda = 0) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$W_\lambda(n_\lambda) = \frac{1}{z_\lambda} e^{-n_\lambda x}$$

$$W_\lambda(n_\lambda = 1) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\langle n_\lambda \rangle = 1 \cdot \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^{x}+1}$$

wär „−" für Bose-Teilchen

Fermi-Funktion

$x \ll -1 \quad \Rightarrow \quad n_F(\varepsilon) \approx 1$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_\lambda - \mu \ll -k_B T$

$x \gg 1 \quad \Rightarrow \quad n_F(\varepsilon) \approx 0$

für $T \longrightarrow 0$ sind Zustände entweder besetzt oder leer. $\quad n_F = \Theta(\mu - \varepsilon)$

(Bild auf Folie)

Ideales Fermi-Gas

$$\langle N \rangle = -\left.\frac{d\Omega}{d\mu}\right|_{T,V} = -\frac{d}{d\mu}(-k_B T)\sum_\lambda \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)}\right)$$

$$= k_B T \sum_\lambda \frac{1}{1+e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)}} \beta e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} = \sum_\lambda \langle n_\lambda \rangle$$

---

kanonische Logik vs. großkanonische Logik

$N \to \mu$ (Folie) $\mu \longrightarrow \langle N \rangle$

$$S = -\frac{d\Omega}{dT}\Big|_{V,\mu} = \frac{d}{dT}\left(k_B T \sum_\lambda \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}\right)\right)$$

$$= k_B \sum_\lambda \ln(\quad)$$

$$+ k_B \cancel{T} \sum_\lambda \frac{1}{1+e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}} (\cancel{-}1)(\varepsilon_\lambda-\mu)(\cancel{-}\underbrace{\frac{1}{k_B T^{\cancel{2}}}}_{\beta}) e^{-x}$$

$$x_\lambda = \beta(\varepsilon_\lambda-\mu)$$

$$= k_B \sum_\lambda \ln\left(1+e^{-x_\lambda}\right) + \frac{x_\lambda e^{-x}}{1+e^{-x_\lambda}}$$

$$n_F(\varepsilon_\lambda) = \frac{1}{e^{x_\lambda}+1} \quad \Big| \quad 1-n_F = 1-\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$= k_B \sum_\lambda -\ln(1-\underbrace{n_F}_{=\langle n_\lambda\rangle}) + (1-\langle n_\lambda\rangle)\ln\frac{1-\langle n_\lambda\rangle}{\langle n_\lambda\rangle}$$

$$x_\lambda = \ln e^{x_\lambda} \quad \text{mit} \quad e^{x_\lambda}+1 = \frac{1}{n_F}$$

$$e^{x_\lambda} = \frac{1}{n_F} - 1 = \frac{1-n_F}{n_F}$$

U auf Folie