Zweite Quantisierung

$$F = F_0 - g\langle V\rangle + \frac{g^2}{2}\sum_{n,n'} \left|\langle n'|V-\langle V\rangle_0|n\rangle\right|^2 \frac{W(n')-W(n)}{E_{n'}-E_n}$$

kompliziert für viele Teilchen

Für viele identische Teilchen braucht man die 2te Quant.

Bosonen oder Fermionen, Spin-Statistik Theorem

↳ S = ganzz. Bosonen

S = halbz. Fermionen

(relativist. Feldtheorie)

Basis von <u>Ein-Teilchen-Zustände</u> i

$$|i\rangle = \varphi_i(x) \qquad \psi_i(x) = \psi_i(\vec{r},\sigma)$$

Ort, Spin

z.B. $\varphi_{\vec{k},1} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}}\delta_{\sigma,1}$

im Kasten $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$

<u>Viele Teilchen</u> Bosonen

insgesamt N Teilchen

N_i Zahl der Teilchen im Zustand i

$$\sum_i N_i = N$$

Besetzungszahl

Bezeichnung $|N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots\rangle$

$$= \frac{\sqrt{N_1!N_2!\ldots N_N!}}{\sqrt{N!}}\sum_P \varphi_{P_1}(x_1)\,\varphi_{P_2}(x_2)\ldots\varphi_{P_N}(x_N)$$

legitime Permutationen

nur verschiedene 1-Teilchen-Zustände permutieren

Ein - Teilchen Operatoren

$$\vec{P} = -i\hbar \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}$$

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_n f^{(1)}_{x_n}$$ allgemeiner Ein-Teilchen-Operator

---

$$\langle N_1 \dots N_i \dots | \hat{F}^{(1)} | \tilde{N}_1 \dots \tilde{N}_i \dots \rangle = ?$$

Welche Matrixelemente sind erlaubt

Operator kann nur den Zustand eines Teilchens ändern

möglich

$$\langle N_1 \dots N_i | \hat{F}^{(1)} | N_1 \dots N_i \rangle = \sum_i N_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle$$

oder

$$\langle \dots N_i \dots N_j - 1 | \hat{F}^{(1)} | \dots N_i - 1 \dots N_j \dots \rangle = \sqrt{N_i N_j} \langle i | f^{(1)} | j \rangle$$

Betrachte

$$\langle N_1 \dots N_i | f^{(1)}_{x_1} | N_1 \dots N_i \dots \rangle =$$

$$\frac{N_1! N_2! \dots}{N!} \sum_P \langle p_1 | f^{(1)}_{x_1} | P_1 \rangle \langle P_2 | P_2 \rangle \dots \langle P_N | P_N \rangle$$

$$= \langle 1 | f^{(1)} | 1 \rangle \frac{(N-1)!}{(N_1 - 1)! N_2! \dots} \cdot \frac{N_1! N_2! \dots}{N!} + \dots$$

$$= \langle 1 | f^{(1)} | 1 \rangle \frac{N_1}{N} + \langle 2 | f | 2 \rangle \frac{N_2}{N} + \dots$$

$$= \sum_i \frac{N_i}{N} \langle i | f^{(1)} | i \rangle$$

$$\langle N_i \dots N_j - 1 \dots | f_{x_1} | \dots N_i - 1 \dots N_j \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{N_1! N_2! \dots}{N!}} \sqrt{\frac{\tilde{N}_1! \tilde{N}_2! \dots}{N!}} \langle P_1 | f | \tilde{P}_1 \rangle \langle P_2 | \tilde{P}_2 \rangle \dots \langle P_N | \tilde{P}_N \rangle$$

$$= \langle i | f^{(1)} | j \rangle \sqrt{\frac{\dots N_i! \dots (N_j - 1)! \dots}{N!}} \sqrt{\frac{\dots (N_i - 1)! \dots N_j!}{N!}} \frac{(N-1)!}{\dots (N_i - 1)! (N_j - 1)!}$$

$$= \frac{\sqrt{N_i N_j}}{N} \langle i | f^{(1)} | j \rangle$$

$$a_i | \dots N_i \dots \rangle = \sqrt{N_i} \, | \dots N_i - 1 \dots \rangle$$

$$a_i^+ | \dots N_i - 1 \dots \rangle = \sqrt{N_i} \, | \dots N_i \dots \rangle$$

$$\langle \dots N_i \dots | a_i^+ | \dots N_i - 1 \rangle = \sqrt{N_i} = \langle \dots N_i - 1 \dots | a_i | \dots N_i \dots \rangle$$

$$a_i^+ a_i | \dots N_i \dots \rangle = a_i^+ \sqrt{N_i} \, | \dots N_i - 1 \rangle = N_i \, | \dots N_i \dots \rangle$$

$\hat{N}_i = a_i^+ a_i$ Zähloperator

$$a_i a_i^+ | \dots N_i \dots \rangle = (N_i + 1) \, | \dots N_i \dots \rangle$$

$$a_i^+ a_i - a_i a_i^+ = [a_i a_i^+] = 1$$

N Teilchen im Zustand i

$$| 0 0 \dots N_i \dots 0 0 \dots \rangle = | N_i \rangle = \frac{(a_i^+)^{N_i}}{\sqrt{N_i!}} | 0 \rangle$$

DAS WICHTIGSTE

$$F^{(1)} = \sum_{ij} \langle i | f^{(1)} | j \rangle \, a_i^+ a_j$$

2-Teilchen Op. z.B. $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = f^{(2)}$

$$\hat{U} \times \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \, \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

2-Teilchen Op. $f^{(2)}(x_a, x_b) = f^{(2)}_{x_a, x_b} = f^{(2)}_{a,b}$

$$\hat{F}^{(2)} = \sum_{a<b} f_{ab}^{(2)}$$

$$\hat{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle ik | f^{(2)} | lm \rangle a_i^+ a_k^+ a_l a_m$$

$$\langle ik | f^{(2)} | lm \rangle =$$

$$\iint dx_1 \, dx_2 \, \varphi_i^*(x_1) \varphi_k^*(x_2) f^{(2)}_{x_1 x_2} \varphi_l(x_1) \varphi_m(x_2)$$

$$H = \sum_n \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{a<b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$$

$$H = \sum_{ij} \frac{\langle i | p^2 | j \rangle}{2m} a_i^+ a_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ilkm} \langle ik | \hat{U} | lm \rangle a_i^+ a_k^+ a_l a_m$$

$$| i \rangle = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2}}$$