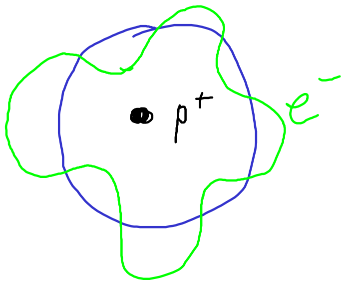
Materiewellen

Übertragung der Dualität von Welle und Teilchen vom Photon auf Teilchen mit Masse (Ruhemasse)
(de Broglie)



i) klassisch: Trajektorie $X(t)$ (ersetzt durch) $\Rightarrow$ zeitl. Veränderliche Wellenfkt. $\psi(\vec{r}, t)$

exakte Position wird ersetzt durch

ii) Wahrscheinlichkeitsdichte $= |\psi(x,t)|^2$ das Teilchen am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t zu finden.

$\Rightarrow$ Normierungsbed. $\int dV \, |\psi(\vec{x}, t)|^2 = 1$

iii) klassische Bewegungsgleichung wird ersetzt durch Schrödinger-Gleichung $\boxed{Gl\ 1}$

Schrödinger-Gleichung

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\Delta}_{\text{Laplace } \nabla^2 \text{ Raum}} \psi(\vec{r}, t) + \underbrace{V(\vec{r}, t)}_{\text{Potential}} \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \underbrace{\partial_t}_{\text{zeitl. part. Ableitung}} \psi(\vec{r}, t)}$$

Zeit

partielle DGL

linear, homogen $\Rightarrow$ Überlagerungsprinzip

1. Ordnung in t

Anfangswertproblem

$\psi(\vec{r}, t)\big|_{t=t_0}$ bestimmt $\psi(\vec{r}, t) \quad \forall t$

c) Wellenpakete

1) Freie Teilchen: (= kein Potential)

$$i\hbar\,\partial_t\,\psi(\vec r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec r,t)$$

Lsg: $\psi(\vec r,t) = A\,e^{i(\vec k\vec r - \omega_k t)}$

ebene Welle

A, $\vec k$ beliebig; $\hbar\omega_k = \frac{\hbar^2\vec k^2}{2m}$

$$\hat{=}\quad E = \frac{p^2}{2m}$$

$|\psi|^2 = |A|^2 = \text{konst}$

Wäre Ebene Welle, A muss Wellenpaket bilden.

so nicht integrierbar (für Normierung)

$\int\limits_V d\vec r\,|A|^2$ div. für $A \neq 0$ ($A = 0$ langweilig)

lineare DGL: Überlagerung von Lsg. mit versch. $\vec k$ ist wieder Lsg.

Normierbare Überlagerung von ebenen Wellen =: Wellenpaket

$\boxed{\text{Gl. 2}}$

$$\int\frac{d\vec k}{(2\pi)^{3/2}}\,g(\vec k)\,e^{i(\vec k\vec r - \omega_k t)} = \psi(\vec r,t)$$

ist Lsg. der Schrödinger-Gl.

mit $\omega_k = \frac{\hbar k^2}{2m}$

3 dim. Integral

Bei festem $t = t_0$ (= 0 per Konvention)

$$\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\, g(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}} = \psi(\vec{r}, 0)$$

Umkehrung:

$$g(k) = \int \frac{d\vec{r}}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, \psi(\vec{r}, t=0) \qquad \text{Gl. 3}$$

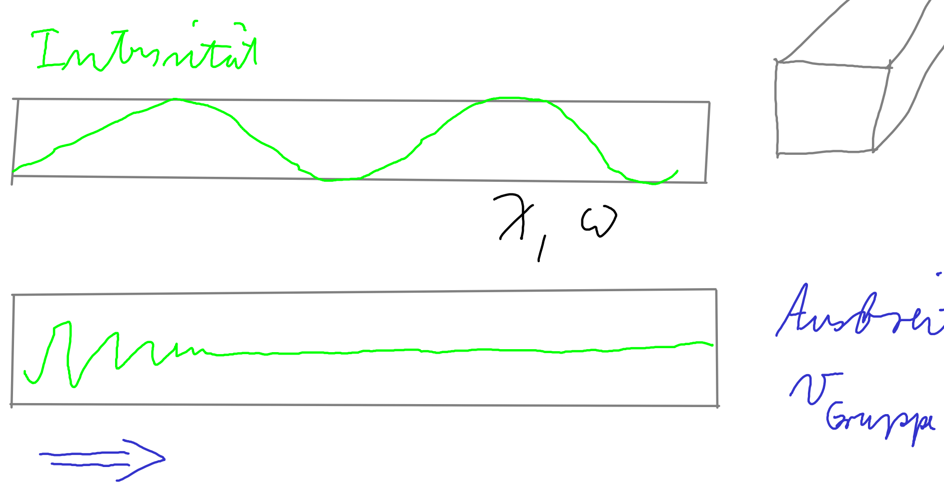
Zu einer festen Zeit kann aus $\psi(\vec{r}, 0)$ immer $g(\vec{k})$ berechnet werden. Gl 2 legt dann $\psi(\vec{x}, t)$ $\forall t$ fest.

[Gilt nicht bei Anwesenheit eines Pot]

Beim Hohlleiter ist $\omega(k)$ eine nichtlineare Fkt. von $\vec{k}$

$\Rightarrow$ Wellenpaket wird verformt

$$v_{Phase} = \frac{\omega(k)}{k} \; ; \quad v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk}$$



Ausbreitung mit v_{Gruppe}

2) Zusammenhang zw. $\psi(x, t=0)$ und $g(k)$

(eindimensional)

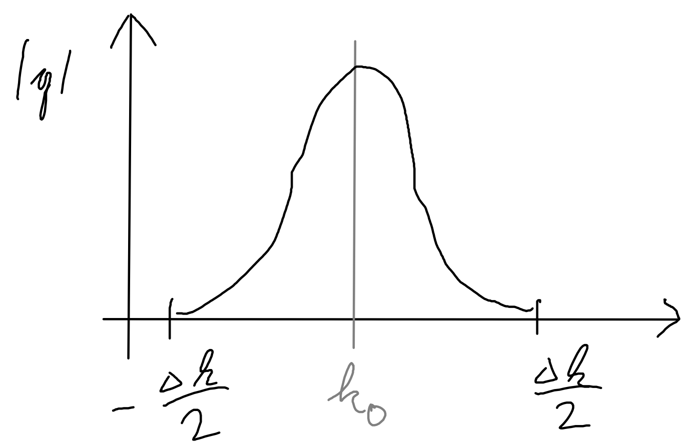
„Breite" von ψ und g

<u>Ansatz:</u> $g(k) = |g(k)|\, e^{i\alpha(k)}$

<u>Annahme:</u>

1) g sei glatt in $\left[k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right]$

und nur dort wesentlich von Null verschieden



2) $\alpha(k)$ variiert nur wenig in diesem Bereich

Taylor: $$\alpha(k) = \alpha(k_0) + (k - k_0) \underbrace{\left.\frac{d\alpha}{dk}\right|_{k=k_0}}_{\overset{!!}{=} -x_0} + \dots$$

$$\psi(x, t=0) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, g(k)\, e^{i(kx - \omega \cdot 0)}$$

$$\psi(x, 0) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, |g(k)|\, e^{i\left[\alpha(k_0) - (k - k_0)x_0 + k_0 x - k_0 x + kx\right.}$$

$$= e^{i(\alpha(k_0) + k_0 x)} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, |g(k)|\, e^{i(k - k_0)(x - x_0)}$$

falls $x = x_0$: nur pos. Beiträge;

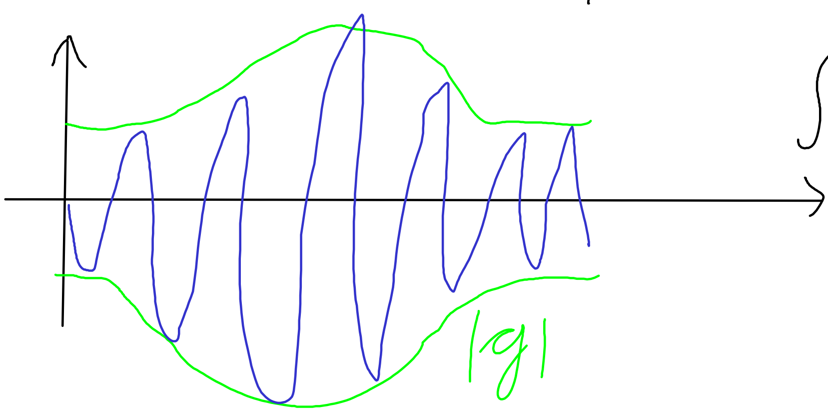
$|\psi|$ ist maximal, falls $|x - x_0| \gg \frac{1}{\Delta k}$

(Beob. weit weg von x_0)

viele Oszillationen innerhalb des Integrationsgebietes $\left[k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right]$

$\Rightarrow |\psi|$ klein

(Prof. geht, Dr. Marquardt macht weiter)



$\int$ Oszill. = klein

Maximum des Wellenpakets im Ortsraum

$$x_0 = -\left[\frac{d\alpha}{dk}\right]_{k=k_0}$$

„stationäre" Phase bei x_0

Breite im Ortsraum $\Delta x \sim \frac{1}{\Delta k}$

Mathematisch gesehen ist dies bzgl. die Fourier-Transformation von g

$$f(x) \Longleftrightarrow \tilde{f}(k)$$

Impuls $p = \hbar \vec{k}$

$$\frac{dN}{dx} = |\psi(x, 0)|^2$$

Zahl der Teilchen am Ort x

$$\frac{dN}{dp} = |\tilde{\Psi}(p,0)|^2$$ Zahl der Teilchen mit Impuls p

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \tilde{\Psi}(p,0)\, e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

für Normierung

Transf. Wellenfkt.

Hierbei findet man dass

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim 1$$ = Heisenbergsche Unschärferelation

wenn Wahrsch., dass Teilchen am Ort $x_1 = 1$ ist (δ-Peak) ist die Wahrscheinlichkeit für p breit. (Gauß)

Impuls und Ort eines Teilchens können nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmt werden.

3) Zeitl. Entwicklung eines freien Wellenpakets

ebene Welle: $\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$

wobei i.a. $\omega = \omega(k)$

$\Psi(x,t)$ von der Form $f(x - \frac{\omega}{k}t)$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_\varphi(x) = \frac{\omega}{|k|}$$

Elektromagnet. Welle im Vakuum:

$$\omega = c|k| \quad , \quad (\nu \cdot \lambda = c)$$

Überlagerung von Wellen mit verschiedenen k:
dann hat die Welle immer noch die Form

$$\phi = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{q}(k)\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{q}(k)\, e^{i|k|(x-ct)} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{q}(k)\, e^{-i|k|(x+ct)}$$

Welle in versch. Ausbreitungsrichtung

<u>in Medium:</u>

$$v_\varphi(k) = \frac{c}{n(k)}$$ Brechungsindex n

$\Rightarrow$ Form des Wellenpakets ändert sich

= Dispersion