Theo # 4.3.1 23.4.08

C Wellenpakete

1) freie Teilchen

$$\psi \sim e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

2) Wellenpakete

$$\psi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \, g(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\Delta x \, \Delta k \gtrsim 1 \quad \text{(Unschärferelation)}$$

3) Zeitl. Entwicklung des freien Wellenpakets

ebene Welle: $\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$

wobei i.A. $\omega = \omega(k)$

$\psi(x,t)$ ist von der Form $f(x - \frac{\omega}{k} t)$

Phasengeschwind.: $v_\varphi = \frac{\omega}{|k|}$

Elektromagnet. Wellen im Vakuum

v_φ hängt nicht von k ab, $v_\varphi = c$

Überlagerung von Wellen mit versch. k hat die Form

$$f_1(x - \frac{\omega}{k} t) + f_2(x + \frac{\omega}{k} t)$$

im Medium $v_\varphi(k) = \frac{c}{n(k)}$ ← Brechungsindex

⇒ Form der Welle ändert sich

⇒ Dispersion

QM $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \rightarrow v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m} = v_\varphi(k)$

⇒ Wellenpaket verformt sich, läuft auseinander

Mit welcher Geschwind. bewegt sich das max. des Wellenpakets?

$g(k) = |g(k)|\, e^{i\alpha(k)}$

$\Rightarrow \quad \Psi(x,t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, |g(k)|\, e^{i(\alpha(k) - \omega t) + ikx}$

$t = 0 \qquad \psi(x,0)$ hat Max. bei $x = x_0 = -\left.\frac{d\alpha(k)}{dk}\right|_{k_0}$

hier $\qquad \alpha(k) \rightarrow \alpha(k) - \omega t$

$\Rightarrow \quad x_{max}(t) = -\frac{d}{dk}\left(\alpha(k) - \overset{\omega(k)}{\omega} t\right)\Big|_{k_0}$

$\Rightarrow$ Verschiebung von Max. $\quad x_{max}(t) - x_{max}(t=0) = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t$

$v_G(k_0) = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$ ist die Gruppengeschwind.

$v_G = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p}{m} \quad \hat{=}$ klassischer Geschwindigkeit

D Zeitunabhängige Potentiale

1) Separation der Variablen $\vec{r}, t$

Schröd.Gl. $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)\Psi(\vec{r},t)$

Ansatz $\quad \Psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}) \cdot \chi(t)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{\chi(t)}\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\chi(t)}_{\text{nur von } t} = \underbrace{\frac{1}{\varphi(\vec{r})}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)\varphi(\vec{r})}_{\text{nur von } \vec{r}} = \text{konst} = \hbar\omega$$

$\Rightarrow$ je konstant

$H(\varphi(\vec{r}))$

a) Lösung für $\chi(t)$:

$\chi(t) = A\, e^{-i\omega t}$

b) $\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)}\varphi(\vec{r}) = \overbrace{\hbar\omega}^{E}\,\varphi(\vec{r})$ liefert Energieeigenwert

stationäre Schrödinger-Gleichung

H Hamilton-Operator

Eigenwertgleichung $\quad H\varphi(\vec{r}) = E\,\varphi(\vec{r})$

Theo # 4.3.2 23.4.08

E : Energieeigenwert

$\varphi(\vec{r})$: Eigenfunktion

$\Rightarrow \psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$

stationärer Zustand

da $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\varphi(\vec{r})|^2$

ist zeitunabhängig

A kommt in φ

φ ist für Normierung verantwortlich

Schr. Gl. $\rightarrow$ Zeitentwicklung der Wellenfkt.

zeitunabh. Schr. Gl. $\rightarrow$ stationäre Zustände + Energie

Überlagerung von Zuständen:

$$H \varphi_n(\vec{r}) = E_n \varphi_n(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \psi_n(\vec{r}, t) = \varphi_n(\vec{r})\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

Dann $\psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n \varphi_n(\vec{r})\, e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$ $c_n \in \mathbb{C}$

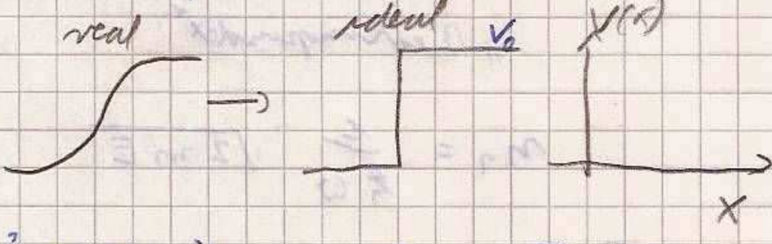
Lösung der Schr. Gl.

$|\psi(\vec{r}, t)|^2$ ist i. A. zeitabhängig

Später: Jede Lsg. der Schrödinger-Gl. kann in fn entwickelt werden ($\hat{=}$ in obiger Form geschrieben werden)

2) Stufenpotentiale (qualitativ)

- eindim. Bewegung
- Idealisierung



Klassisches Teilchen läuft weiter, solange $E > V_0$

oder $\rightarrow$ ~~kom~~ läuft zurück wenn $E < V_0$

QM ~~statisch~~ stat. Schröd. Gl.

$$+\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + (E - V(x))\right)\varphi(x) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\right)\varphi(x)$$

<u>Analogie zur Optik</u>

Ansatz für el. Feld $\vec{E}(x,t) = \vec{e}\, E(x)\, e^{-i\omega t}$

Wellengl. (in Medium)

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) E(\vec{x},t) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{n^2\omega^2}{c^2}\right) E(x) = 0$$

<u>QM</u> $\frac{2m}{\hbar^2}(E - V) \hat{=} \frac{n^2\omega^2}{c^2}$

abrupte Zunahme von V $\hat{=}$ abrupte Abnahme von n^2

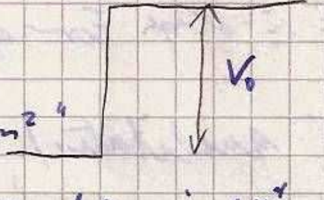
$n^2 > 0$ transparentes Medium z.B. Glas

$n^2 < 0$ reflektiv z.B. Metall

Ausbreitung $\begin{cases} e^{\pm i k x} \\ e^{\pm \rho x} \end{cases}$ $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{n^2}$ $(n^2 > 0)$, $\rho = \frac{\omega}{c}\sqrt{-n^2}$ $n^2 < 0$

<u>Bsp</u>

a)



„kleines n^2"

„großes n^2"

„Brechungsindex"

$$n_1 = \frac{c}{\hbar\omega}\sqrt{2mE}\ ,\quad n_2 = \frac{c}{\hbar\omega}\sqrt{2m(E - V_0)}$$

<u>$E > V_0$</u> $\Rightarrow$ $n_1^2 > n_2^2 > 0$

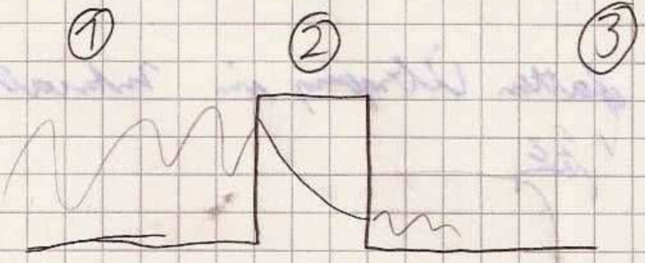
<u>Teilreflexion an der Grenzschicht zw. den beiden Medien.</u>

$0 < E < V_0$, $\Rightarrow$ $n_2^2 < 0$

Totalreflexion, aber Eindringen in Grenzschicht

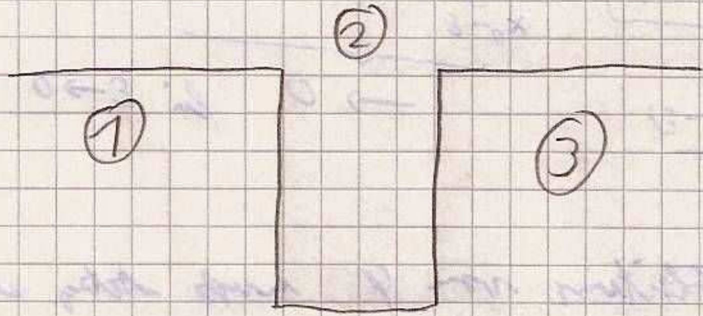
Theo # 4.3.3 23.6.08

b) Potential-Barriere



$0 < E < V_0$: Optik: Welle dringt von 1 in 2 ein, sie läuft zum Teil in 3 weiter, der andere Teil wird reflektiert.

c) Topf



$-V_0 < E < 0$

Klassisch: beliebige E zulässig (um im Topf zu bleiben)

Optik: stehende Welle im Bereich 2 nur für best. Energien möglich.
(Dämpfung in 1 und 3)

3) Stufenpotentiale (quantitativ)

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\right)\varphi(x) = 0$$

(i) $E > V \Rightarrow \varphi(x) = A e^{ikx} + A' e^{-ikx}$

$A, A' \in \mathbb{C} \qquad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E - V$

(ii) $E < V \Rightarrow \varphi(x) = B e^{\varrho x} + B' e^{-\varrho x}$

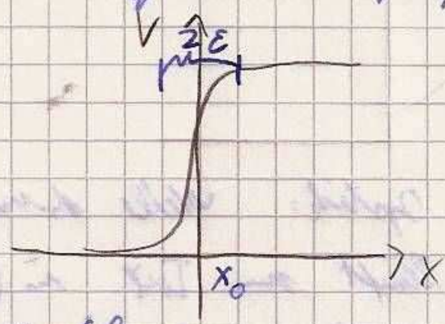
$\frac{\hbar^2 \varrho^2}{2m} = V - E$

(iii) $E = V \Rightarrow \varphi(x) = C + C'x$

Anschlussbed. bei Sprungstelle

Ersetze Sprung durch glatten Übergang im Intervall

$(-\varepsilon, \varepsilon)$



integriere Schröd. Gl.

$$\underbrace{\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx \, \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x)} = \underbrace{\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx \, \frac{2m}{\hbar^2} \left(V_\varepsilon(x) - E \right)}_{\longrightarrow 0 \text{ bei } \varepsilon \to 0}$$

$$= \frac{d\varphi(x+\varepsilon)}{dx} - \frac{d\varphi(x_0-\varepsilon)}{dx}$$

1) $\frac{d\varphi}{dx}$ Ableitung von φ muss stetig sein

2) $\varphi(x)$ muss stetig sein

3) $\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x_0+\varepsilon) - \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x_0 - \varepsilon) = 2 \frac{m}{\hbar^2} \Delta V \varphi(x_0)$