C) Darstellungen im Zustandsraum

Wiederholung

$|u_i\rangle$ Basis

$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$ Orthonormal

$|\psi\rangle = \sum c_i |u_i\rangle$

$P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$ Faktorraum

$\sum P_i = \mathbb{1}$ Vollständigkeit der Basis

Beispiel ... (letztes mal schon)

Ket $|\psi\rangle$ bezüglich $\{|u_i\rangle\}$

$$\begin{pmatrix} \langle u_1 | \psi \rangle \\ \langle u_2 | \psi \rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Bra $\langle \psi |$ bzgl $\{|u_i\rangle\}$

$$\left(\langle \psi | u_1 \rangle , \langle \psi | u_2 \rangle , \dots \right) = \left(c_1^* , c_2^* , \dots \right)$$

Operator A entspricht

$A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$ Matrix mit abzählbar unendlich vielen Indizes (oder kontinuierlicher Index)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

In dieser Darstellung gilt

$\langle u_i |$ von links auf Gl. angewendet

$$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$$

$$\langle u_i | \psi' \rangle = \sum_j A_{ij} c_j$$

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = \sum_{ij} b_i^* A_{ij} c_j$$ ist komplexe Zahl

Basis-Wechsel (Wechsel der Darstellung)

Übergang von Basis $\{|u_i\rangle\}$ nach $\{|t_k\rangle\}$ ist festgelegt durch die Komponenten jedes neuen Basisvektors bzgl. der alten Basis.

$$|t_k\rangle = \sum_i \underbrace{\langle u_i | t_k\rangle}_{\text{Koeffizienten bzgl. } |u_i\rangle} |u_i\rangle \left(= \sum_i \underbrace{|u_i\rangle\langle u_i|}_{=\mathbb{1}} t_k\rangle\right)$$

$\hat{=}$ Matrix $\quad S_{ik} = \langle u_i | t_k\rangle$

$$(S^+)_{ki} = (S_{ik}^*) = \langle t_k | u_i\rangle$$

$$\boxed{S \text{ ist unitär : } SS^+ = S^+S = \mathbb{1}} \iff S^{-1} = S^+$$

Beweis:

$$(SS^+)_{ij} = \sum_k \langle u_i \underbrace{|t_k\rangle\langle t_k|}_{\mathbb{1}} u_i\rangle = \langle u_i | u_j\rangle = \delta_{ij}$$

D) Eigenwertgleichungen // Observablen

1) Eigenwerte / Eigenvektoren

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

Eigenwert (λ), Eigenvektor ($|\psi\rangle$)

- λ ist einfacher Eigenwert
  $\iff$ der zu λ gehörende Eigenvektor ist eindeutig bestimmt
- λ ist g-fach entartet
  $\iff \exists\, g$ linear unabhängige Eigenvektoren zu λ: $\quad |\psi^i\rangle \quad i = 1, \dots, i$

Diese spannen einen g-dimensionalen Eigenraum auf (jede Linearkomb. der Eigenvektoren)

Eigenwertgl. in best. Darstellung $\{|u_i\rangle\}$

$c_i = \langle u_i | \psi \rangle$, $A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$

$$\langle u_i | A \sum | u_j \rangle \langle u_j | \psi \rangle = \lambda \langle u_i | \psi \rangle$$

$$\sum_j A_{ij} c_j = \lambda c_i = \lambda \sum_j \delta_{ij} c_j$$

$$\Rightarrow \sum_j (A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) c_j = 0$$ Charakteristische Gleichung

$c_j \neq 0$ nur dann, wenn $\det(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$

Säkulargleichung

Für $N \times N$-Matrix ist diese Gl. für λ vom Grad N.

N Wurzeln: i.A. reell oder komplex, einfach oder vielfach

Vektor c_j ist Lsg. der Gleichung (*)

Für hermitesche Operatoren gilt:

Falls λ n-fach entartet (d.h. die Säkulargl. hat n mal die Wurzel λ)

$\Rightarrow \exists\, n$ linear unabh. Eigenvektoren zu λ.

2) Observablen

Im folgenden sei A hermitesch

$\boxed{\Rightarrow \text{ Eigenwerte reell}}$

Denn $A|\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$ für Eigenvektor $|\psi\rangle$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \lambda \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\lambda^* \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle^* = \langle \psi | A^+ | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | A | \psi \rangle = \lambda \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^*$$

Ferner gilt $\forall\ |\varphi\rangle$

$$\langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\varphi|A^+|\psi\rangle^* = \lambda^*\langle\varphi|\psi\rangle^*$$
$$= \lambda\langle\psi|\varphi\rangle$$

$\Rightarrow \quad \langle\psi|A = \lambda\langle\psi|$ A wirkt auch nach links

2 Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten

$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad , \quad A|\varphi\rangle = \mu|\varphi\rangle$

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \begin{cases} \lambda\langle\varphi|\psi\rangle & \text{nach rechts} \\ \mu\langle\varphi|\psi\rangle & \text{nach links} \end{cases}$$

Aus $\mu \neq \lambda \quad \Rightarrow \quad \langle\varphi|\psi\rangle = 0$

Im endlich-dim. Raum, hermitesche Matrizen

{ Eigenvektor } = Basis

Hier (unendl. dim. Hilbert-Raum) zusätzliche Forderung.

Hermitescher Operator O, dessen Eigenvektoren Basis bilden, ist $\boxed{\text{Observable}}$

Jeder Zustand kann nach Eigenvektoren von O entwickelt werden.

Beispiele für herm. Operatoren:

1) Hamilton Operator: Energie-Eigenzustände sind vollständig

2) Projektor $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$

a) P_ψ ist hermitesch

Ein Eigenwert ist 1, alle anderen $= 0$

b) für jedes $|\varphi\rangle$ gilt

$$|\varphi\rangle = \underbrace{P_\psi |\varphi\rangle}_{= |\varphi_1\rangle} + \underbrace{(\mathbb{1} - P_\psi)|\varphi\rangle}_{= \varphi_2}$$

$|\varphi_1\rangle$ und $|\varphi_2\rangle$ sind Eigenzustände zu P_ψ mit Eigenwert 1 bzw. 0

$$P_\psi |\varphi_1\rangle = P_\psi^2 |\varphi\rangle = P_\psi |\varphi\rangle = |\varphi_1\rangle$$

$$P_\psi |\varphi_2\rangle = (P_\psi - P_\psi^2)|\varphi\rangle = (P_\psi - P_\psi)|\varphi\rangle = 0$$

Vollständiger Satz von Observablen $A, B, C, \dots$

1) Alle Operatoren vertauschen untereinander
2) Das System der Eigenvektoren ist nicht mehr entartet.

d.h. Zwei Eigenvektoren zu $A, B, C \dots$ unterscheiden sich in mindestens einem Eigenwert

Diese Eigenvektoren sind damit eindeutig durch die Eigenwerte charakterisiert.

Beispiel: Eindim. Problem, x oder p

dreidim. Problem x, y, z oder p_x, p_y, p_z

oder drehimpuls

Drehinvariante Probleme $H, \vec{L}^2, L_z$