Klausur: kein HO

sonst alles, incl. heute

28.5.08, 16 - 18 h

(A - P) @ Gerthsen

(R - Z) @ Gaede

III Postulate der QM

A) Prinzipien

Heisenbergsche Unschärfebeziehung

$$[Q, P] = i\hbar$$

$$\langle Q^2 \rangle \langle P^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$Q = x - \langle \psi | x | \psi \rangle = \Delta x$$

$$P = p - \langle \psi | p | \psi \rangle = \Delta p$$

Trivialerweise folgt $\langle \psi | \Delta x | \psi \rangle = 0$

Vertauschungsrelationen für Δx und Δp wie für x, p

$$\Rightarrow \langle \psi | (\Delta x)^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta p)^2 | \psi \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\sqrt{(\Delta x)^2_\psi} \sqrt{(\Delta p)^2_\psi} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Gleichheit für Gauß-Pakete

B Schrödinger-Gleichung / allg. Resultate

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) \, |\psi(t)\rangle$$

H kann auch von t abhängen

z.B. äußeres EM-Feld, Potential usw.

für geg. $|\psi(t_0)\rangle$ liegt $|\psi(t)\rangle$ fest für alle Zeit.

- Erhaltung der Wahrscheinlichkeit

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = const$$

Bzw. $$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \frac{d}{dt} \psi(t) \rangle = 0$$

mit Schrödinger-Gl.:

$$\frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} H(t) | \psi(t) \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | = - \frac{1}{i\hbar} H(t) | \psi(t) \rangle$$

wegen $\hat{H}$ hermitesch

Ortsdarstellung: $\int d\vec{r}\, | \psi(\vec{r}, t) \rangle = konst := 1$

- Wahrscheinlichkeitsdichten und Ströme

W-Dichte: $\rho(\vec{r}, t) = | \psi(\vec{r}, t) |^2$

Stromdichte: $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)$

Plausibilität: $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar \vec{\nabla}}{i m}$

klass. Stromdichte = Dichte · Geschwind.

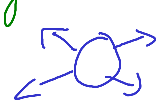
Für ebene Welle: $\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar}$

$$\rho = |A^2| \quad ; \quad j = |A^2| \frac{\vec{p}}{m}$$

lokale Erhaltung:

E-dynamik: $$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\hat{=} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \oint_O d\vec{f} \, \vec{j} = 0$$

V Volumen  O Oberfläche 

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \vec\nabla \left[\frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \vec\nabla \psi - \psi \vec\nabla \psi^*)\right]$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)}\psi + \underbrace{\psi^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi\right)}$$

$$+ \frac{\hbar}{2mi}\left[\left(\cancel{\vec\nabla \psi^* \vec\nabla \psi} + \underbrace{\psi^* \nabla^2 \psi}\right) - \left(\cancel{\vec\nabla \psi \vec\nabla \psi^*} + \underbrace{\psi \vec\nabla^2 \psi^*}\right)\right.$$

mit Schrödinger Gl $= 0$ mit Schröd. Gl. $= 0$

- Zeitl. Entwicklung vom Erwartungswert

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle(t) = \left(\frac{d}{dt}\langle \psi(t)|\right) A | \psi(t)\rangle$$

$$+ \langle \psi(t) | A | \frac{d}{dt}\psi(t)\rangle + \langle \psi(t) | \frac{d}{dt} A | \psi(t)\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\langle \psi(t) | [A, H] | \psi(t)\rangle + \langle \psi(t) | \frac{\partial}{\partial t} A | \psi(t)\rangle$$

$A \Rightarrow B = A \cdot t$ wäre konstruierte zeitabh. Operator

Insbesondere Erwartungswert von A ist zeitl. konst,

falls $[A, H] = 0$ und $\frac{\partial}{\partial t} A = 0$

Beispiel: Wähle $A = \vec R$ Ortsoperator

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec R) \qquad [\vec R, f(\vec R)] = 0 \quad \forall f(\vec R)$$

$$[\vec R, H] = [\vec R, \frac{P^2}{2m}] = \frac{i\hbar \vec P}{m}$$

$$[\vec P, H] = [\vec P, V(\vec R)] = \frac{\hbar}{i}\vec\nabla V(\vec R)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec P = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec R = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{R}\rangle(t) = \left\langle\frac{\vec{p}}{m}\right\rangle(0)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{p}\rangle(t) = -\langle\vec{\nabla}V(\vec{R})\rangle(t)$$

Ehrenfestsches Theorem

Vgl. Hamilton Gl.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

Beachte:

$\langle\vec{\nabla}V(\vec{R})\rangle \neq \vec{\nabla}\langle V(\vec{R})\rangle$

$\langle R\rangle$ = Schwerpunkt des Wellenpakets

im klassischen Grenzfall:

$$\langle\vec{\nabla}V(R)\rangle(t) \longrightarrow \vec{\nabla}V(\vec{r})\Big|_{t=\langle R\rangle(t)}$$

Konservative Systeme $\frac{\partial}{\partial t}H = 0$

Eigenzustände von H bei $t = t_0$

$$H|\psi_n(t_0)\rangle = E_n|\psi_n(t_0)\rangle$$ definiert Basis

Zeitentwicklung eines bel. Zustands

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|\psi_n(t_0)\rangle$$

DGL für $c_n(t)$ aus Schrödinger-Gl.

$$\sum_n i\hbar\frac{d}{dt}c_n(t)|\psi_n(t_0)\rangle = \sum_n c_n(t)E_n|\psi_n(t_0)\rangle$$

$$\Rightarrow\quad i\hbar\frac{d}{dt}c_n(t) = E_n c_n(t)$$

$$\Rightarrow\quad c_n(t) = \exp\left(\frac{-iE_n(t-t_0)}{\hbar}\right)c_n(t_0)$$

$$\Rightarrow\quad |\psi(t)\rangle = \sum c_n(t_0)\exp\left(-\frac{iE_n(t-t_0)}{\hbar}\right)|\psi_n(t_0)\rangle$$

Wichtige Konsequenz: falls nur ein $c_n \neq 0$

(Zustand ist Energie-Eigenzustand)

$|c_n| = 1$ für normierten Zustand, aber c_n kann Phase haben

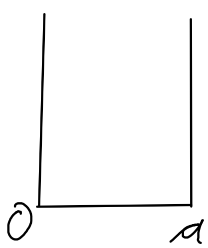
$\Rightarrow$ $\langle A \rangle (t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$

$$= \langle \psi_n(t_0) | \exp\left(\frac{i E_n (t - t_0)}{\hbar}\right) A \exp\left(-\frac{i E_n (t - t_0)}{\hbar}\right) | \psi(t_0) \rangle$$

$$= A(t_0)$$

Für Energie-Eigenzustände ändern sich die Erwartungswerte nicht

Beispiel Teilchen im ∞ tiefen Topf



$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right), \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m a^2}$$

Grundzustand: $\langle x | 1 \rangle = \varphi_1$

1. angeregte Zustand $\langle x | 2 \rangle = \varphi_2(x)$

Betrachte $|\psi_0(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle + |2\rangle \right)$

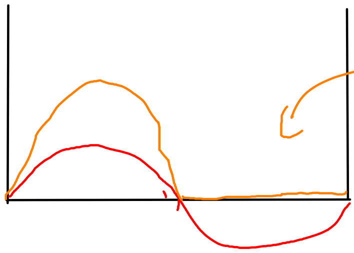
zeitl. Entwicklung

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} \left(|1\rangle + e^{-i(E_2 - E_1)\frac{t}{\hbar}} |2\rangle \right)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho(x, t) = | \langle x | \psi(t) \rangle |^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\varphi_1(x)^2 + |\varphi_2(x)|^2 + 2 \varphi_1(x) \varphi_2(x) \cos(E_2 - E_1) \frac{t}{\hbar} \right)$$



Messung „da war's nicht"

C Schrödinger vs. Heisenberg-Bild / -Darstellung

Schrödinger-Bild:

Zustände sind zeitabhängig

$$|\psi(t)\rangle_S = \sum_n e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} \, c_n(t_0) \, |\psi_n(t_0)\rangle_S$$

$$= U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle_S$$

mit $U(t,t_0) = \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar}(t-t_0)\right)$

Observable $A_S(t)$, Messung ${}_S\langle\psi(t)|A(t)_S|\psi(t)\rangle_S$

Heisenberg Bild Zustände zeitunabh.

$$|\psi\rangle_H = U^\dagger(t,t_0)\,|\psi(t)\rangle_S = |\psi(t_0)\rangle_S$$

Messung:

$$\langle\psi_S(t)|\,U(t,t_0)\,U^\dagger(t,t_0)\,A(t)\,U(t,t_0)\,U^\dagger(t,t_0)\,|\psi(t)\rangle_S$$

$$\langle\psi_H(t)\,|\,A_H(t)\,|\,\psi_H(t)\rangle$$

Bew.

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = \left[A(t), H_H(t)\right] + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} A_S(t)\right)_H$$

Transformation ins Heisenbergbild

Schrödinger: Zustände von t
Operatoren ewig

Heisenberg: Zustand ewig
Operator von t