Matrizen, diesmal richtig

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ansatz: $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\vec{S}\vec{u} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

3 Teilchen im konstanten Magnetfeld (homogen) (Elektron, Positron) mit Spin $\frac{1}{2}$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \qquad U = -\vec{M}\vec{B} = -\gamma B_0 S_z$$

Hamilton-Operator $H = -\gamma B_0 S_z = \omega_0 S_z$ mit $\omega_0 = -\gamma B_0$

SGL: EW-Gl.

trivial, da $H = (2\times 2)$ Matrix in Diagonalform

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H|+\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|+\rangle ; \qquad H|-\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|-\rangle$$

a) Zustand sei Eigenzustand von S_z bzw H

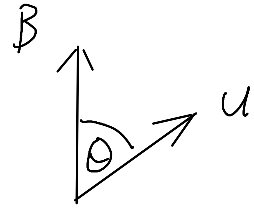
$$|\Psi(t=0)\rangle = |+\rangle \Rightarrow |\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}|+\rangle$$

$$|\Psi(t=0)\rangle = |-\rangle \Rightarrow \quad " \quad = e^{+i\frac{\omega_0}{2}t}|-\rangle$$

Eigenzustand von S_z bleibt Eigenzustand von S_z.

b) $|\psi(t=0)\rangle$ sei Eigenzustand zu $\vec{S}\vec{u}$ mit EW $\frac{\hbar}{2}$

Feld zeigt in z-Richtung



zu Zeit $t=0$

$$|\psi(t=0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} |+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{+i\frac{\varphi}{2}} |-\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2} |+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\omega_0 t)} |-\rangle$$

Zeitl. Änderung der relativen Phase von $|+\rangle$ und $|-\rangle$

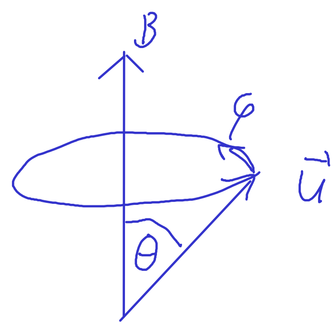
$$= \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$$

Zu jeder Zeit t können wir ein $\vec{u}(t)$ finden, so dass $|\psi(t)\rangle$ Eigenwert von $\vec{u}(t)\cdot\vec{S}$ ist.

Offensichtlich $\theta(t) = \theta(0) = \text{const}$

$$\varphi(t) = \varphi(t=0) + \omega_0 t$$

D.h. Der Vektor $\vec{u}$ präzediert um die z-Achse. (wie im klass. Fall)



Larmor-Präzession

S_z vertauscht mit H

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\langle S_z\rangle(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle[S_z,H]\rangle(t)}_{\text{Heisenberg-Gl.}} + \underbrace{\left\langle\frac{\partial}{\partial t} S_z\right\rangle(t)}_{=0}$$

$\Rightarrow$ Der Erwartungswert der z-Komponente bleibt unverändert.

Test: $\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \psi(t) | \sigma_z | \psi(t) \rangle$

$$= \frac{\hbar}{2} \Big(\langle + | \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i(\varphi+\omega_0 t)/2} + \langle - | \sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2} \Big)$$

$$\Big(\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2} |+\rangle \underbrace{-}_{\text{Wirkung von } \sigma_z} \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i(\varphi-\omega_0 t)/2} |-\rangle$$

nur $\langle + | + \rangle = 1$

$\langle - | - \rangle = 1$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = \frac{\hbar}{2} \cos\theta$$

ist zeitl. konstant. (ist Mittel über viele Teilchen)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ in $\vec{u}$ Richtung zu finden, wenn die Messung bei $t > t_0 = 0$ durchgeführt wird?

$$P(t) = | \langle \psi(t=0) | \psi(t) \rangle |^2$$

$$= \Big| \underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}}_{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)} e^{-i\omega_0 \frac{t}{2}} + \underbrace{\sin^2\frac{\theta}{2}}_{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)} e^{i\omega_0 \frac{t}{2}} \Big|^2$$

$$= \cos^2\frac{\omega_0 t}{2} + \cos^2\theta \sin^2\frac{\omega_0 t}{2}$$

Bsp $\theta = 0 \Rightarrow P(t) = 1 = \text{const}$

(alle in $\vec{u}$-Richtung)

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ($\hat{=}$ $\vec{B} \perp \vec{u}$) $\Rightarrow \cos\theta = 0$

$$\Rightarrow P(t) = \cos^2\frac{\omega_0 t}{2} \quad \text{(maximale Schwankung)}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $-\frac{\hbar}{2}$ in $\vec{u}$ Richtung zu finden?

$$P_{-+}(t) = \sin^2\theta \sin\frac{\omega t}{2}$$

$$P(t) + P_{-+}(t) = 1$$

$\uparrow\uparrow \vec{u}$ $\downarrow\uparrow \vec{u}$ – in eine Richtung muss er ja zeigen

B allgemeines 2 - Zustand - System

1. Stationärer Fall

H = allg. herm. 2×2 - Matrix

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} ; \quad H_{11}, H_{22} \text{ reell}, \quad H_{12} = H_{21}^*$$

hat 4 reelle Parameter und kann geschrieben werden als

$$H = A\,\mathbb{1} + \vec{B}\,\vec{\sigma}$$

hat nix mit $\vec{B}$ - Feld zu tun :-)

$A, \vec{B}$ reell

zunächst: H_0 sei diagonal: $H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$

$$H_0 |1\rangle = E_1 |1\rangle \qquad H_0|2\rangle = E_2 |2\rangle$$

addiere Wechselwirkung $H = H_0 + W$

(Störung um H_0)

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

Wir könnten $H = H_0 + W$ diag. und alles in der neuen Basis ausdrücken, aber oft sind die Eigenzustände von H_0 für die Interpretation anschaulicher

W_{12} Mischungsterm

Eigenwerte von H (nach Rechnung)

$$E_+ = \frac{1}{2}\left(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}\right)^2 + 4|W_{12}|^2}$$

$$E_- = \qquad \text{"} \qquad - \qquad \text{"}$$

$$|\psi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\varphi}{2}}|1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}|2\rangle$$

$$|\psi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\varphi}{2}}|1\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}|2\rangle$$

θ, φ aus $\tan\theta = \dfrac{2|W_{12}|}{E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}}$ $\qquad 0 \leq \theta < \pi$

$$W_{21} = |W_{21}|\, e^{i\varphi}$$

Vereinfachungen: W_{11} und W_{22} tauchen nur in der

(1) Kombination $E_1 + W_{11}$, $E_2 + W_{22}$ auf

W_{11} und W_{22} können in E_1, E_2 absorbiert werden

(2) Energie Nullpunkt ist beliebig:

wähle $\xrightarrow[E_0]{}$ $\quad$ — E_2, — E_1 $\quad \Rightarrow \quad E_1 = -E_2$

$(E_1 - E_2) = 2\Delta$

Neuer Hamilton

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & W_{12} \\ W_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_\pm = \pm\sqrt{\Delta^2 + |W_{12}|^2}, \quad \tan\theta = \frac{|W_{12}|}{\Delta}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{W_{21}}{|W_{21}|}$$

$$H = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(W_{12}) \\ \mathrm{Im}(W_{12}) \\ \Delta \end{pmatrix} \vec{\sigma}$$

analog zu dem
Bloch-Vektor!
(siehe Ex 4)