Interpretation

* Falls $|W_{12}| \ll \Delta$

kleine Störung

$$E_\pm = \pm\sqrt{\Delta^2 + |W_{12}|^2}$$
$$= \pm \Delta \sqrt{1 + \frac{|W_{12}|^2}{\Delta}}$$

mit $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)$

$$E_\pm = \pm\left(\Delta + \frac{1}{2}\frac{|W_{12}|^2}{\Delta}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{|W_{12}|}{\Delta}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{|W_{12}|}{\theta}\right)$$
$$\approx \frac{|W_{12}|}{\Delta} + \theta\left(\frac{|W_{12}|}{\Delta}\right)^3$$

$$|\psi_+\rangle \approx |1\rangle + \delta|2\rangle$$
$$|\psi_-\rangle \approx |2\rangle + \delta|1\rangle$$

Falls $|W_{12}| \gg \Delta$

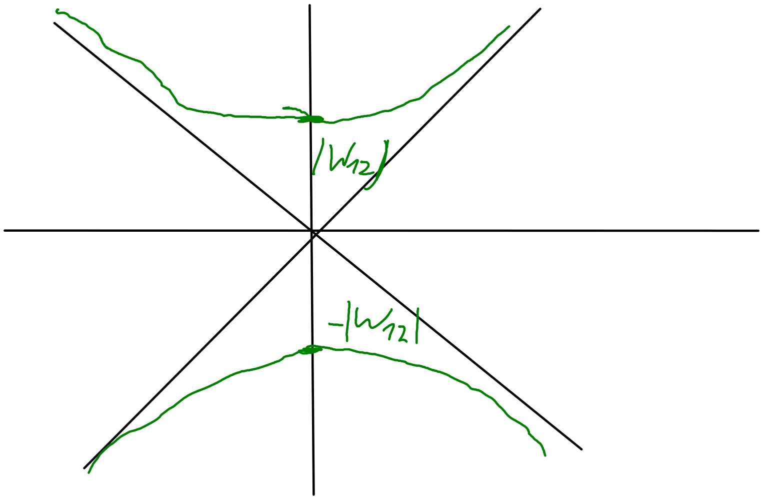
$$E_\pm = \pm\left(|W_{12}| + \frac{\Delta^2}{|W_{12}|}\right) + \theta\left(\frac{\Delta^2}{W_{12}}\right)^2$$

$$\tan\theta \gg 1 \implies \theta \approx \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi_+\rangle = \left(e^{-i\varphi/2}|1\rangle + e^{i\varphi/2}|2\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$|\psi_-\rangle = \left(-e^{-i\frac{\varphi}{2}}|1\rangle + e^{i\frac{\varphi}{2}}|2\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\hat{=}$ maximale Mischung der ursprünglichen Eigenzustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$



Asymptotisch
$E_+ \to E_1 = \Delta$
$E_- \to E_2 = -\Delta$

Entartung wird aufgehoben

2) Zeitentwicklung

In 1) wurden die stat. Zustände $|\psi_\pm\rangle$ berechnet

Zeitentwicklung in der Basis $|1\rangle, |2\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = a_1(t)\,|1\rangle + a_2(t)\,|2\rangle$$

$\overset{SGL}{\Rightarrow}$
$$i\hbar\,\partial_t\, a_1(t) = E_1\, a_1(t) + W_{12}\, a_2(t)$$
$$i\hbar\,\partial_t\, a_2(t) = W_{12}^*\, a_1(t) + E_2\, a_2(t)$$

gekoppelte DGL

Strategie:

- Drücke $|1\rangle, |2\rangle$ durch $|\psi_\pm\rangle$ aus
- zeitentwickle $|\psi_\pm\rangle$ mit $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$
- drücke $|\psi_\pm(t)\rangle$ wieder in $|1\rangle, |2\rangle$ aus

Bsp

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle$$
$$= e^{i\varphi/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\,|\psi_+\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\,|\psi_-\rangle\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\varphi/2}\Big(\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t}\,|\psi_+\rangle$$
$$- \sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t}\,|\psi_-\rangle\Big)$$

$|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ durch $|1\rangle, |2\rangle$ ersetzen

Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Zustand $|2\rangle$ finden

$$\langle 2|\psi(t)\rangle = e^{i\varphi}\Big(\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t}\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} - \sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t}\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\Big)$$

$$= e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\Big(e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t} - e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t}\Big)$$

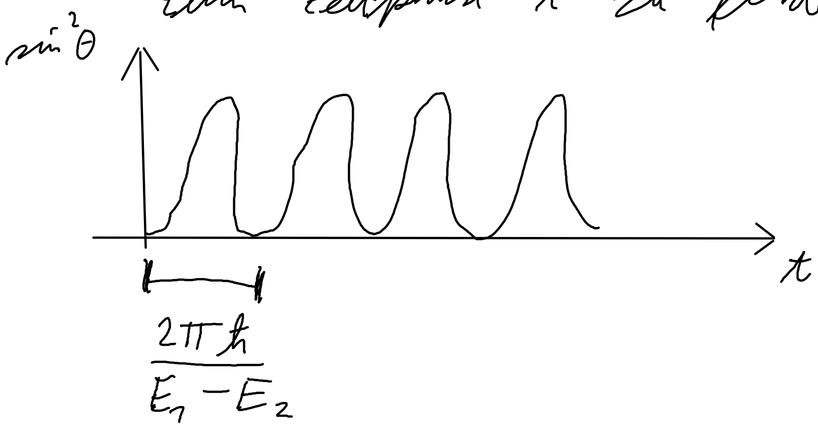
$$= e^{i\varphi}\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}_{=\frac{1}{2}\sin\theta}\, e^{-i\frac{(E_+ - E_-)}{2\hbar}t}\Big(e^{-i\frac{E_+ - E_-}{2\hbar}t} - e^{i\frac{E_+ - E_-}{2\hbar}t}\Big)$$

oder so

$$= -i\, e^{i\varphi}\, e^{-i\frac{E_+ - E_-}{2\hbar}t}\sin\theta\,\sin\Big(\frac{E_+ - E_-}{2\hbar}t\Big)$$

$$P_{21}(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\theta\,\sin^2\Big(\frac{E_+ - E_-}{2\hbar}t\Big)$$

Wahrscheinlichkeit das System im Zustand $|2\rangle$ zum Zeitpunkt t zu finden



Grenzfall:

- $|W_{12}| \ll E_1 - E_2$

  $\Theta \ll 1$, kleine Oszillationsampl.

- Entartung $E_1 = E_2$

  $\Theta = \frac{\pi}{2} \to \sin^2 \theta = 1$

  Bei schlechter Zeitauflösung kann man das Zeitl. mittel messen: $\langle P_{21} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta$

VI Drehimpuls

klass. Mechanik:

Unter gewissen Umständen ist der Drehimpuls eine erhaltene Größe

$\hat{=}$ Rotationsinvarianz (symmetrie)

- Reduktion eines 3 dim. Problem auf ein 1 dim.

$\Rightarrow$ Entartung des Hamilton-Op.

- kleine Störung

$\Rightarrow$ Aufspaltung der Spektrallinien, z.B. Wasserstoff

- "Elementare" Objekte, besitzen Bahndrehimpuls $\hat{=}$ Spin

- Addition von Drehimpulsen

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

A Vertauschungsrelationen

klass. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$ usw. $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$

QM

$x, p \rightarrow \hat{x}, \hat{p}$ keine Probleme, da nie $x_1 p_1$ auftaucht (sonst Problem wegen $[x, p] \neq 0$

Anordnung der Op. in $\vec{L}$ beliebig, da $[x_i, p_j] = 0$ $i \neq j$

aber L_1, L_2, L_3 kommutieren nicht

$\Rightarrow$ Vertauschungsrelation

$[L_1, L_2] = i\hbar L_3$ / $[L_2, L_3] = i\hbar L_1$

$[L_3, L_1] = i\hbar L_2$ $[L_k, L_l] = i\hbar \varepsilon_{klm} L_m$

Alle folgenden Überlegungen gelten für jeden Satz von 3 Operatoren mit den Vertauschungsrelationen

in Zukunft $\vec{J}$

Definiere $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$; J^2 kommutiert mit $J_{1,2,3}$

z.B. $[J^2, J_1] = [J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, J_1]$

$$[J_1^2, J_1] = 0$$

$$[J_2^2, J_1] = J_2 [J_2, J_1] + [J_2, J_1] J_2$$

$$= -i\hbar (J_2 J_3 + J_3 J_2)$$

$$[J_3^2, J_1] = i\hbar (J_2 J_3 + J_3 J_2)$$

$$\Rightarrow [J^2, J_1] = 0$$

J^2 und J_1 vertauschen, daher lassen sie sich gemeinsam diagonalisieren.

B Eigenwerte und Eigenzustände

algebraische Behandlung

Wir suchen vollständ. Satz kommutierender Operatoren und die entsprechenden Eigenvektoren, welche den Zustandsraum von $\vec{J}$ aufspannen.

Wähle J^2; $J_3 = J_z$

Definiere $J_\pm = J_x \pm i J_y$

Vertauschungsrelation von $J_\pm$

$$[J_z, J_\pm] = [J_z, J_x] \pm i [J_z, J_y]$$
$$= i\hbar J_y \pm i(-i\hbar J_x)$$
$$= i\hbar J_y \pm \hbar J_y$$
$$= \pm\hbar J_\pm$$

Zusammen:

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \qquad | \ [J^2, J_\pm] = 0$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

J^2 = Quadratsumme herm. Operatoren

$\Rightarrow \langle \psi | J^2 | \psi \rangle \geq 0$

$\Rightarrow$ Eigenwerte ≥ 0

Bezeichne Eigenwerte λ von J^2 mit $j(j+1)\hbar^2$

Damit ist j eindeutig festgelegt

Eigenwert von J_z : $m\hbar$

Notation $|j, m\rangle$

$$J^2 |j,m\rangle = \hbar^2 (j(j+1)) |j,m\rangle$$

$$J_z |j,m\rangle = \hbar m |j,m\rangle$$