VI Drehimpuls

A) Vertauschungsrelationen

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k \quad / \quad [L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k$$

B Eigenwerte, algebraische Behandlung

$$\vec{L} \Rightarrow \vec{J}$$

Eigenwerte und Eigenzustände von $\vec{J}^2$ und J_z da $[J^2, J_z] = 0$

Def $\quad J_\pm = J_x \pm i J_y$

(1) $\quad [J_z, J_+] = \hbar J_+$

(2) $\quad [J_z, J_-] = -\hbar J_-$

(3) $\quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z$

(4) $\quad [\vec{J}^2, J_\pm] = 0$

(5) $\quad J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$

(6) $\quad J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$

(7) $\quad J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$

$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ ist Summe Hermit. Operatoren

$$\Rightarrow \quad \langle \psi | J^2 | \psi \rangle \geq 0$$

Eigenwerte ≥ 0, Eigenwerte von $\vec{J}^2$ sei λ

$$\lambda = j(j+1) \quad \text{mit} \quad j = \left(\sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}\right) \geq 0$$

Eigenwerte von J_z : $m\hbar$

Klar: wissen wir noch nicht, dass j, m ganzzahlig sind und kennen noch nicht den Zusammenhang von j und m.

Notation: $|j,m\rangle$: $J^2\,|j,m\rangle = \hbar\, j(j+1)\,|j,m\rangle$

$J_z\,|j,m\rangle = \hbar\, m\,|j,m\rangle$

2 Eigenwerte zu J^2 und J_z

a) Es gilt $-j \leq m \leq j$

Beweis $|\,J_\pm\,|j,m\rangle|^2 \geq 0$