C) Bahndrehimpuls in Polarkoordinaten

Suche $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$: mit $[\ ] = \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

$\vec{L}^2 = -\hbar^2[\ ]$

$$\text{I}\quad \boxed{-[\ ]\,Y_\ell^m = \ell(\ell+1)\,Y_\ell^m \text{ und } \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_\ell^m = m\,Y_\ell^m}\quad \text{II}$$

Separationsansatz:

$$Y_\ell^m = F_\ell^m(\theta)\,\phi_m(\varphi)$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y = mY \Rightarrow \phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$$

Forderung: ϕ eindeutig und stetig $\Rightarrow e^{im2\pi} = 1 = e^{im\cdot 0}$

$\Rightarrow m$ ganzzahlig

I

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+\ell(\ell+1)\right]F_\ell^m(\theta) = 0$$

Normierung:

$$1 = \int d\Omega\,|Y_\ell^m|^2 = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\,|Y_\ell^m|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{2\pi\int_{-1}^{1} d\cos\theta\,|F_\ell^m|^2 = 1}$$

Konstruktion einer allgemeinen Lösung:

Für $m=\ell$ gilt: $L_+ Y_\ell^\ell = F_\ell^\ell e^{i\ell\varphi} = 0$

also: $\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \ell\cot\theta\right)F_\ell^\ell = 0$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \ell\right)F_\ell^\ell = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\sin\theta} - \ell\right) = 0$$

$$\Rightarrow F_\ell^\ell(\theta) = c_\ell\sin^\ell\theta$$

$$\boxed{Y_\ell^\ell = c_\ell(\sin\theta)^\ell e^{i\ell\varphi}}\qquad \text{Normierung: } c_\ell = (-1)^\ell\frac{1}{2^\ell\ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

Verwende: $|\ell, m-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m-1)}}\frac{L_-}{\hbar}|\ell,m\rangle$ (siehe B) 3)

Y_l^m kann aus Y_l^l durch $(l-m)$-faches differenzieren erhalten werden... (längere Rechnung)

$$\boxed{Y_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^l \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\; e^{im\varphi}(\sin\theta)^{-m}\frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}(\sin\theta)^{2l}}$$

Alternative Form:

$$\boxed{Y_l^m = (-1)^{(m+|m|)\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\; P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}}$$

mit $P_l^{|m|}$ den assoziierten Legendre Polynomen:

$$\boxed{P_l^{|m|}(u) = (1-u^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{du^m}P_l(u)}$$

$P_l^0(u) = P_l(u)$ Legendre polynome:

$$\boxed{P_l(u) = (-1)^l \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{du^l}(1-u^2)^l}$$

Struktur:

$P_l(u)$ = Polynom l-ten Grades in u

für l $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ Potenzen in u

$P_l^m(\cos\theta) = [\text{Polynom } (l-m)\text{-ten Grades in } \cos\theta]\cdot\sin^m\theta$

$$\boxed{Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*}$$

Beispiele:

$l=0,1$: $\quad Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$; $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$; $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$

$l=2$: $\quad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$; $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}$; $Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}$

Verhalten unter Paritätstransformation: $\vec{x} \Rightarrow -\vec{x}$

d.h.: $\theta \Rightarrow \pi - \theta$ und $\varphi \Rightarrow \varphi + \pi$

$$e^{im\varphi} \Rightarrow e^{im\varphi}e^{im\pi} = e^{im\varphi}(-1)^m$$

$$\left.\begin{matrix}\cos\theta \Rightarrow -\cos\theta\\ \sin\theta \Rightarrow +\sin\theta\end{matrix}\right\} \Rightarrow P_l^m(-u) = (-1)^{l-m}P_l^m(u)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_\ell^m(\pi-\theta, \varphi+\pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta,\varphi)}$$

die Parität ist $(-1)^\ell$

Zusammenhang mit der bra-ket Schreibweise:

$Y_\ell^m(\theta,\varphi) \equiv \langle \theta,\varphi | \ell, m \rangle$

Orthogonalität: $\int d\Omega\, Y_\ell^{m*}(\theta,\varphi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)$

$= \int d\Omega \langle \ell, m | \theta,\varphi \rangle \langle \theta,\varphi | \ell', m' \rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$

Vollständigkeit:

$$\sum_{l,m} Y_\ell^m(\theta,\varphi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)^* = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$

Beispiele: Kugelflächenfkt als 1. Näherung zur Beschreibung der Rauhigkeit der Erdoberfläche.
Fourierreihe als Beschreibung eines Frequenzspektrums auf einem 1D Kreis.

D) Drehimpuls als Erzeugender (Generator) der Drehungen

Im Polarkoordinaten: $L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

kleine α

$$\left(1+\frac{i}{\hbar}\alpha L_z\right) f(\theta,\varphi) = \left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) f(\theta,\varphi) \approx f(\theta,\varphi+\alpha)$$

für endliche α und analytische Funktion f:

$$e^{i\frac{\alpha}{\hbar}L_z} f(\theta,\varphi) = e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}} f = \sum \frac{1}{n!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^n f(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi+\alpha)$$

allgemein: $\boxed{e^{i\vec{\varphi}\frac{\vec{L}}{\hbar}} \psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}\,')}$

wobei $\vec{x}\,'$ aus $\vec{x}$ durch Drehung in Richtung $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$ um den Betrag von $|\vec{\varphi}|$ hervorgeht.

E) Integrale für Bewegung und Symmetrieeigenschaften

- A ist Integral der Bewegung $\Longleftrightarrow$ alle Erwartungswerte von A sind zeitl. konst.

  Falls $\frac{\partial}{\partial t} A = 0$ und $[A, H] = 0$:

  dann ist A Integrall der Bewegung (III B) Heisenberg-Gleichung)
- Betracht räumliche Verschiebungen oder Drehungen

Beispiel: Drehung: $\vec{x} \to \vec{x}\,' = S\vec{x}\,;\ \vec{x} = S^{-1}\vec{x}\,'$

Es gelte: $\psi'(\vec{x}\,') = \psi(\vec{x})$ (Zustand Systemunabhängig)

Suche einen Operator R_s, so dass

$$\psi'(\vec{r}\,') = R\,\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(S^{-1}\vec{x}\,') = R_s\,\psi(\vec{x}\,')}$$ gilt auch für $\vec{x}$