

Wiederholung

$$\varphi(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) e^{i\psi(\vec{r})}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{2\mu} \left(\rho^* \frac{\hbar \vec{\nabla}}{i} \varphi + \text{const} \right)$$

$$\rho(\vec{r}) = \alpha^2(\vec{r})$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{\mu} \alpha^2(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) = \frac{\hbar}{\mu} \rho \frac{1}{r \sin \theta} m \vec{e}_\varphi$$

magnetquantenz.

Driftimpulsdichte (klass.)

$$d\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{j} d^3\vec{r}$$

\vec{j} zeigt nur in \vec{e}_φ Richtung | \vec{L} zeigt nur in z-Richt.



$$d\vec{L}_z = \mu \vec{e}_z (\vec{r} \times \vec{j}) d^3\vec{r}$$

$r \sin \theta \ j$

$\mu \rho$ Massendichte

$\mu \vec{j}$ Impulsdichte = Momentendichte

$$d\vec{L}_z = \hbar m \underbrace{\rho(\vec{r}) d^3\vec{r}}_{=1}$$

$$\Rightarrow L_z = \hbar m$$

2) Stromdichte bei Anwesenheit eines Magnetfelds

Gegeben sei $A(\vec{r})$, zeitl. konstant, so dass

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} = 0$$

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right)^2 + qU(\vec{r})$$

kanonische Impuls
klass. $\mu \cdot \vec{v}$

Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{1}{2\mu} \left(\psi^* \left(\frac{\hbar \vec{\nabla}}{i} - q\vec{A} \right) \psi + \text{const} \right)$$

klass. $\mu \cdot \vec{v}$

(erfüllt $\partial_x \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$)

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \rho \left(\hbar \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) - q\vec{A} \right)$$

Speziell: $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$ (B in z-Richt.)

wähle $\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}$

$$\gamma = \frac{1}{\mu} \int \left[\hbar \vec{\nabla} \xi + \frac{q}{2} \vec{r} \times \vec{e}_z B \right]$$

Speziell für Grundzustand: $l=0 \Rightarrow \xi=0$

Annahme: Wellenfkt. wird durch B nicht stark
verändert;

$$\vec{j} = -q \frac{B}{2} \vec{e}_z \times \vec{r} \int_{100} \quad \text{Kreisstrom}$$

Quantenzahlen

3) Eichtransformation von Potential und Wellenfkt.

\vec{E} und \vec{B} Feld bleibt unverändert, wenn

$$A(\vec{r}, t) \rightarrow A'(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}, t)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda$$

SGL:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\phi \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

wie muss Ψ transformiert werden, damit die Gl. weiter gilt?

$$\Psi \rightarrow \Psi' = ?$$

so, dass Ψ' die SGL mit A', ϕ' löst?

bsg. $\Psi \rightarrow \Psi' = \exp\left(\frac{i q \Lambda(\vec{r}, t)}{\hbar}\right) \Psi$

D Paramagnetismus / Diamagnetismus

Zemans-Effekt

1) allgemeine Diskussion

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \text{ konstant}$$

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(\vec{p} + \frac{q}{2} \vec{r} \times \vec{B} \right)^2 + V(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left[\vec{p}^2 + \frac{q}{2} (\vec{p} (\vec{r} \times \vec{B}) + (\vec{r} \times \vec{B}) \vec{p}) + \frac{q^2}{4} (\vec{r} \times \vec{B})^2 \right] + V(\vec{r})$$

$$B (\vec{p} \times \vec{r}) \cdot \vec{2} \quad r^2 B^2 - (\vec{r} \cdot \vec{B})^2$$

wegen $[p_i, r_j] = i \hbar \delta_{ij}$ ist das erlaubt

$$p_1 r_2 - p_2 r_1 = \hbar (r_2 p_1 - r_1 p_2)$$

$$H = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \vec{p}^2 + V(\vec{r})}_{H_0} - \underbrace{\frac{1}{2\mu} q (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{B}}_{= \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar}} + \underbrace{\frac{q^2}{8\mu} (x^2 + y^2) B^2}_{H_2}$$

$$\mu_B = \frac{\hbar q}{2\mu}$$

H_1

H_2

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \quad H_0 \gg H_1 \gg H_2$$

Energie-Niveaus spalten auf $\sim B \cdot m$

$$2\ell + 1 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \ell = 1$$

Interpretation des Paramagnet. Terms

klass. magn. Moment $\vec{M} = \frac{q}{2m_e} \vec{L}$

$$H_1 = -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad \text{magn. Moment richtet sich in Richtung von } \vec{B} \text{ aus}$$

allgemein:

$$H_{\text{Zeeman}} = - \frac{q}{2m_e} (\vec{L} + 2 \vec{S}) \cdot \vec{B}$$

g-Faktor

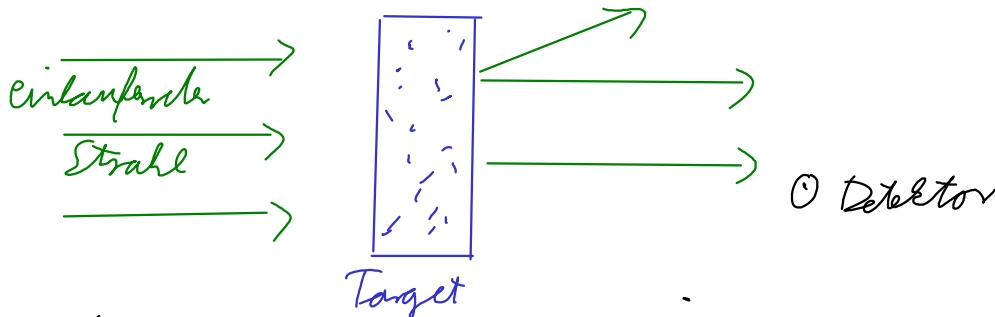
$$H_2 \sim B^2 \quad \text{diamagn. Term}$$

VIII Streutheorie

A Einführung

1. Streuung / Experiment

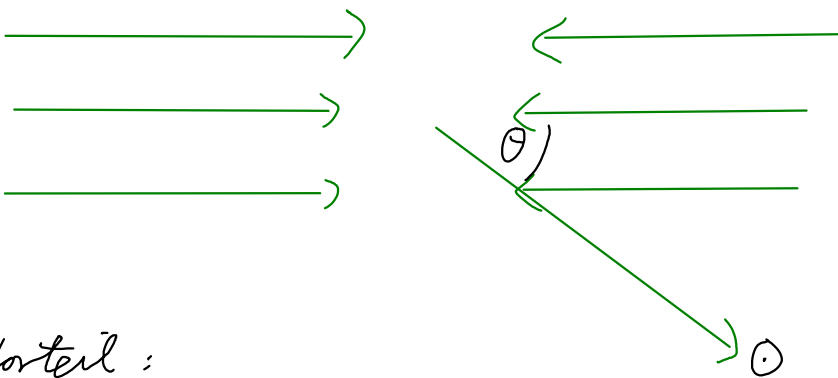
Entweder: Strahl von Teilchen auf stationäres Target



Vorteil: Bei genügend dichtem Target volle Ausnutzung des Strahls

Nachteil: Energie im Schwerpunktsystem reduziert

Oder: Teilchenstrahl gegeneinander



Vorteil:

$$E_{\text{Streuung}} = E_1 + E_2$$

Nachteil: Kaum Ereignisse,
sehr starke Fokussierung notwendig

B Übergang zu Schwerpunkts und Relativkoordinaten

⇒ Streuung an fixierten Potentialen

$\mu = \text{reduz. Masse}$, $\vec{r} = \text{Relativkoord.}$

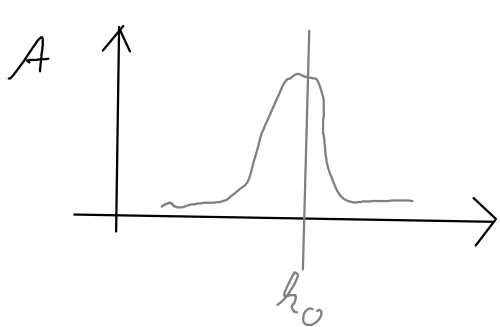
1) Zeitabhängige Beschreibung mit Wellenpaketen

Verhalten für große Abstände ($V(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$)
schnell

Einlaufende Welle ($\hbar \vec{k} = \vec{p}$)

$$\phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i \frac{E_{\vec{k}}}{\hbar} t} A_{\vec{k}_0}(\vec{k})$$

$A_{\vec{k}_0}(\vec{k}) = \text{um } \vec{k}_0 \text{ zentriertes Wellenpaket}$



$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Potential spielt
keine Rolle

gestreute Welle:

$$\Psi^S(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} e^{-i \frac{E(k)}{\hbar} t} A_{\vec{k}_0}(\vec{k}) F(\vec{k}, \hat{r})$$

$\hat{r} = \text{Einheitsvektor in } \vec{r} \text{-Richtung} (\hat{=} \text{Beobachter})$

Für „schmal“ Wellenpaket mit $\vec{k} \approx \vec{k}_0$

$$\Psi^S = \frac{F(\vec{k}_0, \hat{r})}{r} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i \frac{E(k)}{\hbar} t} A_{\vec{k}_0}(\vec{k})$$