$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \, \mathrm{Im}\left(f(\theta = 0)\right) \quad (*)$$

1) Zunächst nur für Pot. mit endl. Reichweite.
(bzw. genügend schnell abfallend)
für Coulomb Pot. $\sigma_{tot} \to \infty \;\hat{=}\; \mathrm{Im}\, f(\theta=0) \to \infty$

2) Gl. (*) gilt auch bei inelast. Streuung
3) f hat immer $\mathrm{Im}\, f \neq 0$ wenn Streuung vorgeht
4) Für $k \to 0$ muss $\mathrm{Im}(f(\theta=0, k)) \sim k$ verschwinden, damit σ_{tot} nicht divergiert.

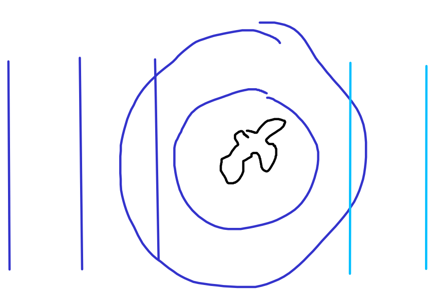
B Partialwellen

Annahme $V(\vec{r}) = V(r)$
$\Rightarrow$ SGL in Kugelkoordinaten wie beim Bindungspotential

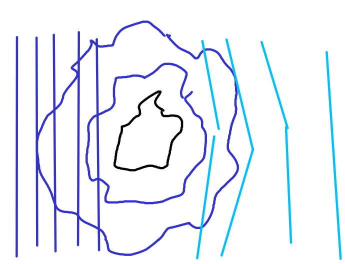
$$\Psi(\vec{r}) = \mathrm{Fkt}(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$$

Rotationssymmetrie um z Achse keine φ-Abh.
$\Rightarrow$ nur magnet. Quantenzahl $m = 0$

Motivation: bei niedriger Energie (kleine k) bleiben nur wenig, niedrige Drehimpulse.



Näherungsweise isotrop



komplizierte θ-Abhängigkeit

Eventuell großer Beitrag bei bestimmten Wert von l und k $\Rightarrow$ Resonanz

1 Entwicklung der Streulösung für große r nach Drehimpulsen

α) ebene Welle $e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta}$

$(k_r = k \cdot r)$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l\, j_l(k_r)\, P_l(\cos\theta)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, i^l\, j_l(k_r)\, Y_{l(m=0)}(\theta)$$

mit den sphärischen Besselfunktionen

$$j_l(\rho) = (-1)^l \rho^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho} \qquad \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^2 = \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)$$

große r: $j_l(k_r) \longrightarrow \dfrac{\sin(k_r - l\frac{\pi}{2})}{k_r}$

kleine r: $\longrightarrow \dfrac{(kr)^l}{(2l+1)!!}$ (vgl. Drehimpuls-barriere)

β) Streuamplitude $f(\theta,\varphi) \hat{=} f(\cos\theta)$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l\, P_l(\cos\theta)$$

γ) Zusammenbauen

$\psi_k(r,\theta)$ = Streulösung für große r

$$\psi_k(r,\theta) = N\left(e^{ikr\cos\theta} + f(\cos\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

$$= N \sum_l \left((2l+1)\, i^l \underbrace{j_l(k_r)} + (2l+1) f_l \frac{e^{ikr}}{r}\right) P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{\sin(k_r - l\frac{\pi}{2})}{kr} = \frac{1}{2ikr}\left[e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})} - e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})}\right]$$

verwende

$$e^{il\frac{\pi}{2}} = i^l \quad \left(= \sqrt{(-1)^l}\right)$$

$$\psi_k(r,\theta) = N \sum_l \left[\frac{2l+1}{2ik} (-1)^{l+1} \frac{e^{-ikr}}{r} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{(2l+1)}{2ikr} + (2l+1) f_r\right] \frac{e^{+ikr}}{r} \right] P_l(\cos\theta)$$

Für jede Lösung der SGL gilt:

$$\psi(r,\cos\theta) = N \sum (2l+1)\, a_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \frac{P_l(\cos\theta)}{r}$$

jedes l ist stehende Welle, Strom in radialer Richtung $= 0$

Ein und Auslaufende Kugelwelle sind gleich stark.

$f_l \longleftrightarrow \delta_l, a_l$, zerlege $\sin(\,) = \frac{1}{2i}(e^{i} - e^{-i})$

Koeff. vergleich von e^{+ikr} und e^{-ikr} damit

$$f_l = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin\delta_l \quad , \quad a_l = i^l \frac{1}{k} e^{i\delta_l}$$

anschaulich:

Die freie Lösung zu festem l bei großem r

$$\sim \frac{(2l+1)}{2ikr} \left((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr} \right)$$

<u>Streulösung:</u>

$$\sim \frac{(2l+1)}{2ikr} \left((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr + 2i\delta_l} \right)$$

$\Rightarrow$ Streuung $\hat{=}$ Phasensprung der Auslaufenden Welle um $2\delta_l$ (vgl. zum ungestörten Fall)

<u>$\delta_l \hat{=}$ Streuphasen</u> Hier sind sie reell,

bei Absorption können sie auch im. Teil bekommen ($\mathrm{Im}\,\delta_l > 0$)

2. Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 =$$

$$\sum_{l,l'} f_l^* f_{l'} (2l+1)(2l'+1)\, P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)$$

$$\sigma_{tot} : \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$\underbrace{\int d\Omega}_{\int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta) = 2\pi \cdot \frac{2}{(2l+1)} \delta_{ll'}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma_{tot} = 4\pi \sum_l (2l+1)\, |f_l|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l = \sum_l \sigma_l}$$

δ_l muss $\sim k$ verschwinden

σ_l Beitrag von Drehimpuls l zu σ_{tot}

$$\leq \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \quad \text{Partialwellenunitarität}$$

äquivalent $\sigma_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1)\, |1 - e^{2i\delta_l}|^2$

da $e^{-i\delta_l} \sin\delta_l = (1 - e^{2i\delta_l}) \frac{1}{2i}$

$S_l(k) = e^{2i\delta_l} \;\hat{=}\;$ Streumatrixelement zum Drehimpuls

$= 1$ keine Streuung

C Streuphasen aus Experiment

Beispiel: nur $\delta_0, \delta_1 \neq 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \Big| e^{i\delta_0} \sin\delta_0 + \underbrace{3}_{(2l+1)} e^{i\delta_1} \sin\delta_1 \underbrace{\cos\theta}_{P_1} \Big|^2$$

Beitrag $\sin^2\delta_0$ isotrop

$\sin^2\delta_1 \cos^2\theta$

Interferenzterm : $\sin\delta_0 \sin\delta_1$: prop. zu $\cos\theta$ (Zwischen)

Verschwindet nach Integration

Messung von $\frac{d\sigma}{d\Omega} \Rightarrow \delta_0, \delta_1$

Abwesenheit von höheren Potenzen in $\cos\theta$

$\Rightarrow$ bestätigt Konsistenz

Nochmals das Optische Theorem

$$f(\theta,\varphi) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) \quad \text{und}$$

$$f_l = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin\delta_l$$

$$P_l(\cos\theta = 1) = 1$$

$$f(\theta=0) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1)\, e^{i\delta_l} \sin\delta_l$$

$$\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1) \sin^2\delta_l$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \sigma_{tot} = 4\pi \cdot \mathrm{Im}(f)$$

optisches Theorem

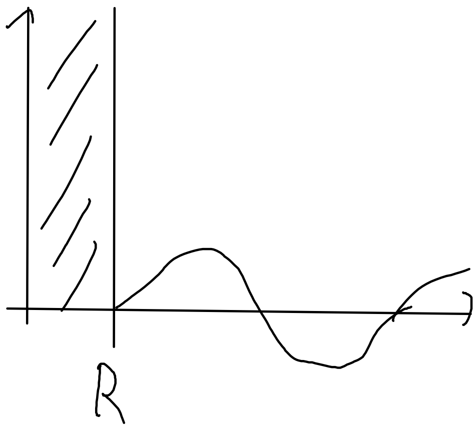
D Streuung an harter Kugel

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ \infty & r < R \end{cases}$$

rad. SGL

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right) u_l(r) = \left[V'(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r)$$

mit $\psi = \frac{u}{r} Y_{lm}$ $\qquad k^2 = 2\mu E \qquad V'(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}$



Lsg

$$u = \sin(kr - kR)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i(kr - kR)} - e^{i(\cdots)}\right)$$

$$\delta_0 = -kR \qquad < 0!$$

$$(\sim k)$$

$$\left(\frac{\delta_0}{k}\right)^2 4\pi = \text{Größe des Streuzentrum}$$

Allg: Abstoßendes Potential $\delta < 0$

anziehendes " $\delta > 0$