C Behandlung der Streutheorie durch Integralfkt

1. Greensche Fkt

lineare homogene DGL: $D\,\psi(x) = f(x)$ (*)

gesucht ist $\psi(x)$, gegeben $f(x)$, D

Speziell: $f(x) = \delta(x - x')$

$$D\,G(x,x') = \delta(x - x')$$

allg. Lsg. von (*) — G ist Greensche Fkt zum Diff. Op. D

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int dx'\, G(x,x')\, f(x')$$

Dabei ist ψ_0 eine Lösung der homogenen DGL

$D\,\psi_0 = 0$, ψ_0 wird i.A. durch Anfangsbed. festgelegt

Streutheorie: SGL $(\vec{\nabla}^2 + k^2)\, u(\vec{r}) = V'_{eff}(\vec{r})\, u(\vec{r})$

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \qquad V_{eff} = \frac{2\mu}{\hbar^2} V$$

Umformen der DGL in Integralform

$$(\vec{\nabla}'^2 + k^2)\, G(\vec{x},\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$\vec{\nabla}^2$ ist Translationsinvariant,

d.h. $G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x} - \vec{x}')$

$$y = \vec{x} - \vec{x}', \qquad \tilde{G}(\vec{q}) = \int \frac{dy}{(2\pi)^{3/2}}\, G(\vec{y})\, e^{-i\vec{q}\vec{y}}$$

$$(-q^2 + k^2)\, \tilde{G}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$ ist Lsg. im Impulsraum ($\nabla \Rightarrow q$)

Rücktransformation

$q\,y\cos\theta$

$$G(\vec{y}) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\vec{q}\vec{y}} \left(\frac{1}{\vec{q}^{\,2} + \vec{y}^{\,2}}\right) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{iY}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, q\, e^{iqY}\,\frac{1}{q^2-k^2}$$

Pole des Integranden bei $q = \pm k$

Integrationsvorschrift muss spezifiziert werden.

$\Rightarrow$ $i\varepsilon$ Vorschrift

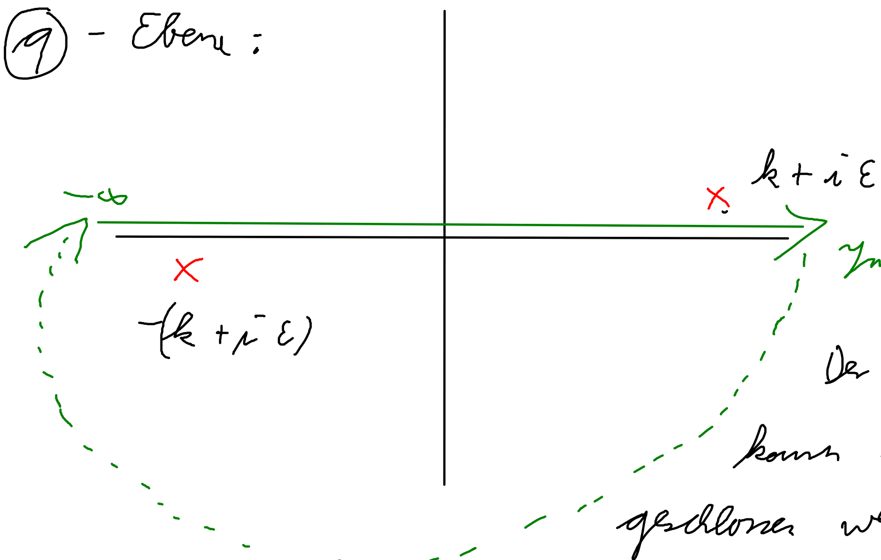
$$G_\pm := -\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{iY}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, q\, e^{iqY}\,\frac{1}{q^2-k^2\mp i\varepsilon}$$

Für G_+ Pol bei

$$q = \pm\sqrt{k^2+i\varepsilon} = \pm k\sqrt{1+\frac{i\varepsilon}{k^2}} = \pm k\left(1+\frac{i\varepsilon}{2k^2}\right)$$

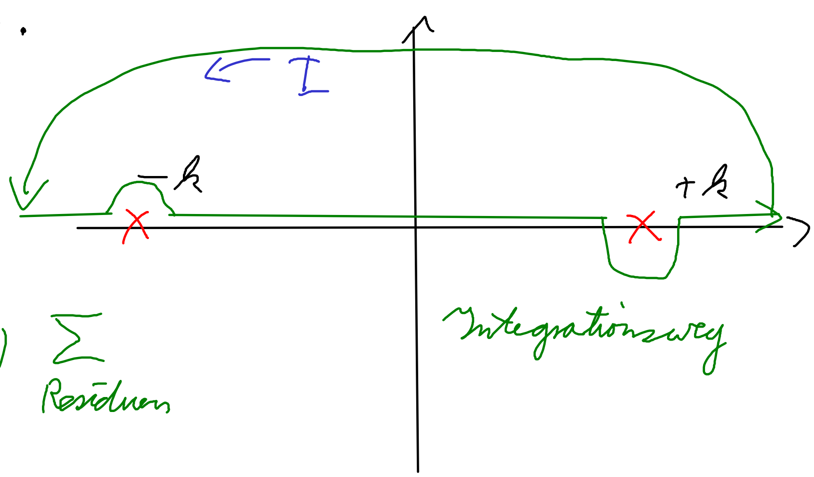
$$\hat{=} \pm(k+i\varepsilon)$$

q - Ebene:



Der Integrationsweg kann in die obere Halbebene geschlossen werden, denn e^{iqY} fällt für komplexe q mit pos. Imag-Teil exponentiell ab.

Äquivalent zu



$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots = \int_{I} = (2\pi i)\sum_{\text{Residuen}}$$

Residuen: Funktionswert an diesen Stellen

$$(q^2+k^2) = (q+k)(q-k)$$

$$G_+(y) = -\frac{1}{(2\pi)}\,\frac{1}{y}\left(q\,\frac{e^{iqy}}{q+k}\right)\Bigg|_{q=k}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{iky}}{y}$$

Bem.:
- Für G_- hätten wir $-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-iky}}{y}$ erhalten
- Für $k=0 \;\hat{=}$ Problem aus der Elektrostatik

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\,\delta(\vec{x}) \quad ; \quad \phi = \frac{1}{|\vec{x}|}$$

- $G_+ \;\hat{=}$ auslaufende Welle
  $G_- \;\hat{=}$ einlaufende Welle
- $G_+, G_- \;\hat{=}$ vollständiges System
- $G_+ \pm G_- \;\hat{=}$ stehende Wellen (wie sin / cos)

2 SGL ⟶ Integralgleichung

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)\,\psi_k(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}\,V(\vec{r})\,\psi_k(\vec{r})$$

Formale Lsg:

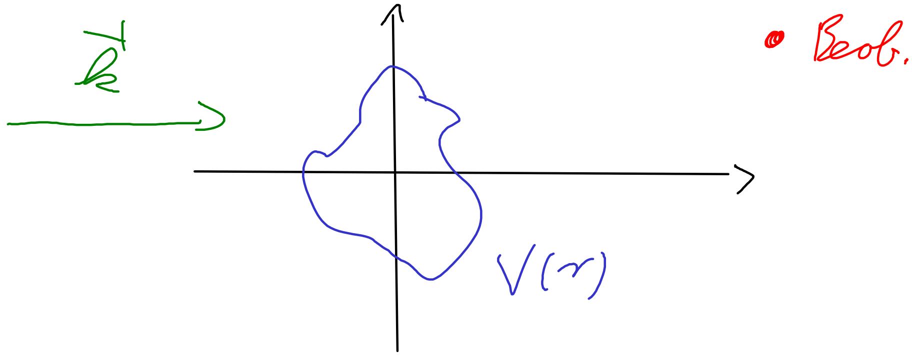
$$\psi_k^+(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + \int d\vec{r}\; G_+(\vec{r}-\vec{r}\,')\,V'(\vec{r}\,')\,\psi_k^+(\vec{r}\,')$$

G_+ einsetzen Lippmann - Schwinger - Gl.

$$\psi^+(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}\,'\;\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,V'(\vec{r}\,')\,\psi_k^+(\vec{r}\,')$$

$\hbar\vec{k}$ ist Impuls des Teilchens
$\vec{r} =$ Ort des Beob..

$V(\vec{r})$ sei in der Nähe des Ursprungs lokalisiert



Verhalten von ψ für große $\vec r$

$$|\vec r - \vec r\,'| = \sqrt{\vec r^{\,2} - 2\vec r\vec r\,' + \vec r\,'^{2}} \approx r\left(1 - \frac{r r'}{r^2}\right)$$

Das vom Beob. am Ort $\vec r$ gemessene Teilchen hat |Impuls| $\hbar k$ und Richtung $\frac{\vec r}{|\vec r|}$

$\Longrightarrow \hbar \vec k\,' = \hbar k \frac{\vec r}{r}$ als Impulsvektor

$$\frac{e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}}{|\vec r - \vec r\,'|} \xrightarrow[|r| \gg |r'|]{} \frac{e^{i(kr - \vec k \vec r\,')}}{r}$$

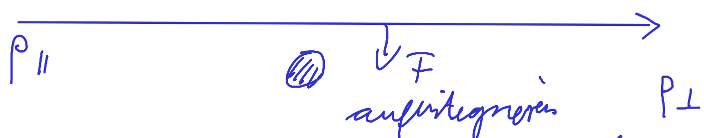
$$\psi^+_k(\vec r) \Longrightarrow e^{i\vec k\vec r} - \frac{1}{4\pi r} e^{ikr}\int d\vec r\,' e^{-i\vec k'\vec r\,'} V(r')\, \psi^+_k(\vec r\,')$$

Streuamplitude:

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int d\vec r\,' e^{-i\vec k'\vec r\,'} V(\vec r\,')\, \psi^+_k(\vec r\,') \qquad (**)$$

3) Bornsche Näherung

vgl. klass.



Streuung bei hohen Energien:

Amplitude unterscheidet sich wenig von ebener Welle

$\Rightarrow$ Lippmann-Schwinger-Gl. lässt sich näherungsweise iterativ lösen.

Startwert $\psi_k^+(\vec r)\big|_1 = e^{i\vec k\vec r}$

$$\psi_k^+(\vec r)\big|_2 = e^{i\vec k\vec r} - \frac{1}{4\pi}\int d\vec r\,' \frac{e^{ik|\vec r-\vec r\,'|}}{|\vec r-\vec r\,'|} V_k'(\vec r\,')\,\psi_k^+(\vec r\,')\big|_1$$

$$\psi\big|_3 = \qquad \int \qquad \psi\big|_2$$

usw.

Resultat für Streuamplitude aus (**)

Niedrigste Ordnung: $f(\theta,\varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\vec r\,' V(r')\,e^{i(\vec k-\vec k')\vec r}$ Bornsche Näherung

daraus kommt Wirkungsquerschnitt $= 0$

Hinweis: Opt. Theorem mit 2. Ordnung

Beispiel

Yukawa Potential $V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$

$$\int d\vec r\, e^{i\vec q\vec r}\, V(r) = V_0 \frac{4\pi}{q^2+\alpha^2}$$

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{2V_0 m}{\hbar^2\left((\vec k-\vec k')^2+\alpha^2\right)}$$

$$(\vec k-\vec k')^2 = \vec k^2 + \vec k'^2 - 2\vec k\vec k' = 2k^2(1-\cos\theta)$$
$$= \left(2k\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4V_0^2 m^2}{\hbar^4\left(\left(2k\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+\alpha^2\right)^2}$$

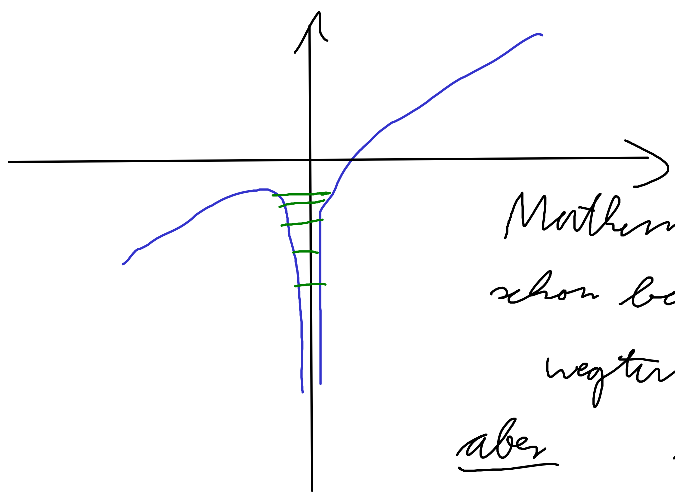
Spezialfall $\alpha \to 0$ ($\hat=$ Coulombpotential)

Singularität bei $\theta = 0$ (Näherung nicht für $\theta = 0$)

IX Störungstheorie

Störungstheorie liefert gute Ergebnisse, obwohl Taylor-Reihe divergiert

Bsp H-Atom + $\vec{E}$-Feld



Mathematisch können alle Elektronen schon bei geringen Spannungen wegtunneln

aber große Tunnelzeit