Korrespondenzprinzip

weitere physikalische Größen in der klassischen Physik
$O(\vec{r}, \vec{p}, t)$

Operatoren

- entsprechend Operatoren $O(\vec{R}, \vec{P}, t)$. Dabei tauchen Produkte von Operatoren auf (schon definiert)
- Beliebige Funktionen von Operatoren sind immer durch die Reihenentwicklung definiert

Beispiel

- Hamilton Operator
  - freie Teilchen $\boxed{H = \frac{P^2}{2m}} \Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2}$ (in Ortsdarstellung)
  - Teilchen im Potential $\boxed{H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{R})} \Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{R})}$

    (Teilchen im Kasten, Potentialstufen und Barrieren
    Harmonischer Oszillator
    Wasserstoffatom)

    $R \quad T \qquad T+R=1$
  - geladenes Teilchen im (zeitabh.) elektromagnetischen Feld

    $\boxed{H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - q\vec{A}(\vec{R},t)\right)^2 + q\phi(\vec{R},t)}$

    ($\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$) Vektorpot. elektr. Potential

    (Landau-Niveaus $\Rightarrow$ Quanten-Hall-Effekt (QHE))

    ...
  - **Vielteilchensysteme mit Wechselwirkungen**

    $\rightarrow$ schwierig und interessant
  - **Drehimpuls** $\boxed{\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}} \rightarrow \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$

<u>Problem</u>: in der klass. Physik $x p_x \rightarrow X P_x$

$= p_x x \rightarrow P_x X \neq X P_x$

"Symmetrisierungsregel":
wenn die Operatoren nicht vertauschen, betrachten wir z.B. die symmetrisierte Form $x p_x = \frac{1}{2}(x p_x + p_x x) \rightarrow \frac{1}{2}(X P_x + P_x X)$

- Bei $\vec{L}$ kein Problem: $L_x = y p_z - z p_y$ und $[y, P_z] = 0$

- $(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}))^2 = \underbrace{p^2 + q^2 A}_{} - q\vec{p}\vec{A} - q\vec{A}\vec{p}$

$= \quad \ldots \quad - q\frac{\hbar}{i}(\nabla\vec{A}(\vec{r})) - q\vec{A}\vec{p} - q\vec{A}\vec{p}$

also gibt es einen Term $-\frac{\hbar}{i}(\nabla\vec{A}(\vec{r}))$

Also wenn man die Coulomb-Eichung $\operatorname{div}\vec{A}=0$ wählt, dann verschwindet dieser Term.

- Es gibt auch QM Observable ohne klassischen Äquivalent z.B. Spin $\vec{S}$ Spin im Magnetfeld $H = \gamma\vec{S}\cdot\vec{B}$

1.2.8 Tensorprodukt von Zustandsräumen

Angenommen der Hamiltonoperator lässt sich als Summe unabhängiger Terme schreiben: $\boxed{H = H_1 + H_2}$

↳ sie wirken auf separate Freiheitsgrade $[H_1, H_2] = 0$

für die wir getrennt die EW-Probleme lösen.

$H_1 |u_i\rangle = E_i^{(1)} |u_i\rangle \quad i = 1, \ldots N^{(1)} \quad |u_i\rangle \in \mathcal{H}^{(1)}$

$H_2 |v_\ell\rangle = E_\ell^{(2)} |v_\ell\rangle \quad \ell = 1, \ldots N^{(2)} \quad |v_\ell\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$

Dann wird das EW-Problem $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ gelöst durch ein Produkt $|\psi_n\rangle = |u_i\rangle \otimes |v_\ell\rangle \quad n = (i,\ell)$

und $E_n = E_i^{(1)} + E_\ell^{(2)}$

$|\psi_n\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$

erzeuge: $\boxed{|u_i\rangle \otimes |v_\ell\rangle} = |u_i\rangle|v_\ell\rangle$ (Tensorprodukt)

$H|\psi_n\rangle = (H_1 + H_2)|u_i\rangle|v_\ell\rangle = (H_1|u_i\rangle)|v_\ell\rangle + (H_2|v_\ell\rangle)|u_i\rangle = \ldots$

H_1 wirkt in $\mathcal{H}$ wie $H_1 \otimes \mathbb{1}$ $\qquad = (E_i^{(1)} + E_\ell^{(2)})|u_i\rangle|v_\ell\rangle$

Beispiele:

a) Teilchen im 3-dim Kasten $V(x,y,z) = V(x) + V(y) + V(z)$

$H = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m} + V(x)}_{H_1} + \underbrace{\frac{p_y^2}{2m} V(y)}_{H_2} + \frac{p_z^2}{2m} V(z) \qquad V_x = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le L_x \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

$H_1 \varphi_{n_1}(x) = E_{n_1} \varphi_{n_1}(x) \qquad \varphi_{n_1}(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_x}\right)$ für $0 \le x \le L_x$

$n_1 = 1, 2, \ldots \qquad E_{n_1} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1\pi}{L_x}\right)^2$

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}(x,y,z) = \varphi_{n_1}(x)\,\varphi_{n_2}(y)\,\varphi_{n_3}(z)$$

$$E_{n_1,n_2,n_3} = E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3}$$

b) Teilchen mit Spin $H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + V(\vec{R})}_{H_1} + \underbrace{\gamma \vec{S}\cdot\vec{B}}_{H_2}$

H_1: Ortsraum, H_2: Spinraum

$$\psi_n(\vec{r}) = \underbrace{\varphi_i(\vec{r})}_{\text{Ortsraum}} \cdot \underbrace{\chi_m}_{\text{Spinraum}}$$

c) mehrere Teilchen $H = \frac{p_1^2}{2m_1} + V(\vec{R}_1) + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\vec{R}_2)$

(unterscheidbare Teilchen)

$$\psi_n(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \varphi_{n_1}(\vec{r}_1)\cdot\varphi_{n_2}(\vec{r}_2)$$

Mehrere Teilchen mit Wechselwirkung

$$H = \underbrace{\frac{p_1^2}{2m_1} + V_1(\vec{R}_1)}_{H_1} + \underbrace{\frac{p_2^2}{2m_2}\, V_2(\vec{R}_2)}_{H_2} + W(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)$$

- für $V_1 = V_2 = 0$, $W \neq 0$ $\Rightarrow$ Schwerpunkt und Relativkoord.
  $\Rightarrow H = H_M + H_m$
  $\Rightarrow$ Eigenzustände sind Produkte
- für V_1, $V_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ Problem das EW-Problem zu lösen

$H_1 |u_i\rangle = E_i^{(1)} |u_i\rangle$, $H_2 |v_l\rangle = E_l^{(2)} |v_l\rangle$

Aber $|u_i\rangle |v_l\rangle$ bildet immer noch Basis in $\mathcal{H}$

$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Beispiel 2 Spins

$$H = \gamma \vec{S}_1 \vec{B} + \gamma \vec{S}_2 \vec{B} - J \vec{S}_1 \vec{S}_2$$

für $\vec{S}_1$ ist Basis $|+\rangle^{(1)}$ und $|-\rangle^{(1)}$ $S_{z_1}|\pm\rangle^{(1)} = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle^{(1)}$

$\vec{S}_2$ genauso

Basis beider Spins: $|+\rangle^{(1)}|+\rangle^{(2)} = |++\rangle$

$|+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)} = |+-\rangle$

$|-+\rangle$

$|--\rangle$

Beachte: jedes Teilsystem kann in einer Superposition sein

$|\psi\rangle = \sum a_i |u_i\rangle$; $|\chi\rangle = \sum b_l |v_l\rangle$

$$\Rightarrow |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle = \left(\sum_i a_i |u_i\rangle\right) \otimes \left(\sum_l b_l |v_l\rangle\right)$$

$$\Downarrow \qquad = \sum_{i,l} a_i b_l |u_i\rangle |v_l\rangle$$

Produktzustände

- Es gibt auch Zustände, die sich nicht als Produkt von Superposition schreiben lassen

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)} - |-\rangle^{(1)}|+\rangle^{2}\right)$

Diese Zustände nennt man <u>verschränkte</u> Zustände

<u>seltsame Eigenschaften</u>:

- Einstein-Podolski-Rosen Paradoxon
- Schrödingers Katze (2 Bestandteile)
- Bell'sche Ungleichungen
- Teleportation
- Quanten-Computer