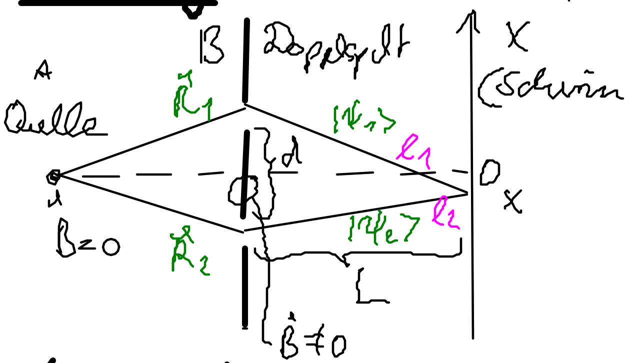
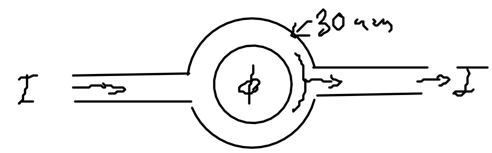
Nachtrag: ω_b sind „virtuelle" Zwischenzustände



Feldkonfiguration



1.5.2 Aharonov-Bohm Effekt

Von jedem Spalt geht eine Kugelwelle aus

$$\boxed{\psi_{1/2}(\vec{r}) \propto \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}_{1/2}|} \exp[ik|\vec{r}-\vec{R}_{1/2}|]} \qquad E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

- Amplituden werden (auf Schirm)

$$\psi(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})$$

- Wahrscheinlichkeit auf dem Schirm bei x aufzutreffen ist

$$|\psi(\vec{r})|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \underbrace{\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1}_{\text{Interferenzterme}}$$

$$\psi_{1/2}(\vec{r}) = |\psi_{1/2}| \exp[i\varphi_{1/2}]$$

- nahe $x=0$ auf Schirm: $|\psi_1| \approx |\psi_2|$

$$\Rightarrow |\psi|^2 \approx 2|\psi_1|^2 + 2|\psi_1|^2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) = 2|\psi_1|^2\left(1+\cos\left(\frac{d}{L}\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{im Minimum (destruktive Interferenz)} \\ 4|\psi_1|^2 & \text{im Max (konstruktive Interferenz)} \end{cases}$$

$$l_{1/2} = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} \mp x\right)^2} \qquad l_1 - l_2 \underset{|x|\ll L}{\approx} -\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = k l_1 \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx}{L}$$

geladenes Teilchen im Magnetfeld

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi}$$

$\vec{A}$: Vektorpotential $\quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad$ ϕ: elektr. Potential

$$\psi_{\vec{A}}(\vec{r}) \overset{?}{\longleftrightarrow} \psi_{\vec{A}=0}(\vec{r})$$

- Wenn $\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{A} = \nabla\Lambda \Leftrightarrow \Lambda(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \vec{A}(\vec{r}\,')$

Dann ist Zusammenhang eine Eichtransformation

$$\psi_{\vec{A}}(\vec{r}) = \exp\left[i\frac{q}{\hbar}\int_0^{\vec{r}} d\vec{r}\,'\vec{A}(\vec{r}\,')\right]\psi_{\vec{A}=0}(\vec{r})$$

nachprüfen durch einsetzen in Schrödingergleichung

$$\psi_{1,\vec{A}}(\vec{r}) = \exp\left[i\frac{q}{\hbar}\int d\vec{r}\,'\vec{A}(\vec{r}\,')\right]\psi_{1,\vec{A}=0}(\vec{r})$$

$$\psi_{2,\vec{A}}(\vec{r}) = \exp\left[i\frac{q}{\hbar}\int d\vec{r}\,'\vec{A}(\vec{r}\,')\right]\psi_{2,\vec{A}=0}(\vec{r})$$

Interferenz → zusätzlicher Phasenfaktor

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx}{L} + \frac{q}{\hbar}\oint d\vec{r}\,'\vec{A}(\vec{r}\,') \quad \left(\text{mit } \oint = \int - \int\right)$$

$$= \oint d\vec{r}\,\vec{A}(\vec{r}) \underset{\text{(Stokes)}}{=} \oint d\vec{f}\,\vec{\nabla}\times\vec{A} = \oint d\vec{f}\,\vec{B} = \phi$$

ϕ magnetischer Fluss durch die Fläche F

$$\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx}{L} + 2\pi\frac{\phi}{\phi_0} \qquad \phi_0 = \frac{h}{q}$$

mit $\phi_0 = \frac{h}{|e|}$ Flussquant

- Durch Änderung von $\vec{B}$ verschiebt man das Interferenzmuster
- Der wichtigste Effekt kommt von der Phase → Fluss auch wenn $\vec{B} \neq 0$ wäre liefert Lorentzkraft viel kleineren Effekt.

Weitere Postulate

- Identische Teilchen
  viele identische T → 2. Quantisierung
- Antiteilchen

II Störungstheorie (nächste Vorlesung)

III Der Spin bzw. q.m. Zwei-Zustandssysteme

- Drehimpuls $\vec{J}$ ist definiert durch Vertauschungsrelationen

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \text{ (zykl. Vert.)} \Rightarrow [\vec{J}^2, J_z] = 0$$

vollständig Satz von Eizust. $|j,m\rangle \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \quad -j \leq m \leq j$

$$\vec{J}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \qquad J_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \qquad \Delta m = \pm 1$$

• Bahndrehimpuls, berechnet durch $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$

$$\vec{L}^2 |lm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle \qquad l = 0,1,2,\dots$$

• Die Natur zeigt, es gibt halbzahlige j genannt Spin $\vec{S}$

$$\vec{S}^2 |sm\rangle = \hbar^2 s(s+1) |sm\rangle \qquad s = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots$$

$$S_z |sm\rangle = \hbar m |sm\rangle$$

Elektronen, Protonen, Quarks, ... $s = \frac{1}{2}$

Photonen $s = 1$

Elementarteilchen $s = \frac{3}{2}, \dots$

• Verknüpft mit dem Drehimpuls ist i.A. ein **magn. Moment** $\vec{M}$

$$H = \frac{1}{2m}\left[P - q\vec{A}\right]^2 = H_0 + H_1 + H_2 \quad \text{(Potenzen in } \vec{A}\text{)}$$

$$H_1 = -\vec{M} \cdot \vec{B}, \quad H_2 \ll H_1$$

$$\vec{M} = \mu \frac{1}{\hbar} \vec{L} \qquad \mu = \frac{q\hbar}{2m}$$

Für Elektronen: $\mu = \mu_B = -\frac{|e|\hbar}{2m_e}$ Bohrsches Magneton

$$\approx -9{,}27 \cdot 10^{-24} \, \frac{\text{Joul}}{\text{Tesla}}$$

Für Spin gilt: $\vec{M} = g \mu_B \frac{1}{\hbar} \vec{S}$ g: gyromagnet. Verhältnis/"g-Faktor"

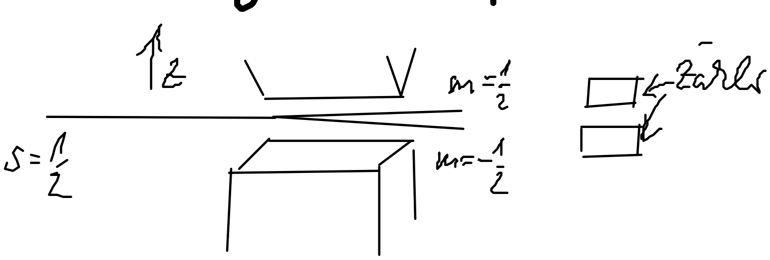
$g = 2\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \dots\right]$ Quantenelektrodynamik

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,\dots}$ Feinstrukturkonstante

Für Protonen gilt: $\mu_P = g \frac{|e|\hbar}{2m_p}$ $\quad g = 2 \quad m_p \gg m_e$

Neutronen: $\mu_n = -1{,}913 \, \mu_P$

Stern-Gerlach-Experiment



$$\vec{B} = B(z) \hat{e}_z$$

$$H_1 = -\vec{M}\vec{B} \Rightarrow \text{Kraft } \vec{F} = -\nabla H_1 = M_z \frac{\partial}{\partial z} B(z) \hat{e}_z$$