$H_1 = -\vec{M}\,\vec{B}$

Bahn: $\vec{M} = \mu \frac{1}{\hbar} L$; $\mu = \frac{q\hbar}{2m}$

Elektron $\mu = \mu_B = -\frac{|e|\hbar}{2m_e}$ (oft $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e}$)

Spin $\vec{M} = g\,\mu \frac{1}{\hbar} \vec{S}$

Elektron

$\mu = \mu_B$; $g = 2\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \dots\right] \approx 2$

Kerne: $\mu = \mu_N := \frac{|e|\hbar}{2m_p} \ll |\mu_B|$

Proton $g = 5{,}586$ ← Korrektur

Neutron $g = -3{,}826$ ←

Wiederholung

μ_N für Protonen als "Einheit" auch für Neutron

[Spin]

Darstellung für $S = 1/2$

Spin ist Drehimpuls :

$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$

$[S^2, S_z] = 0 \longrightarrow S^2 |s,m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s,m\rangle$

$= \frac{3}{4}\hbar^2 |s\,m\rangle$

$S_z |s,m\rangle = \hbar\, m\, |s\,m\rangle$

$-s \le m \le s$, $\Delta m = 1$

$\Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$

Pauli - Matrizen

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$

nützlich: $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

"Spin-flip" Operator

Notation

$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ erstes $\frac{1}{2}$ ist redundant $\Rightarrow \left|\frac{1}{2}\right\rangle \Rightarrow |+\rangle$

$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\quad\left|-\frac{1}{2}\right\rangle \quad |-\rangle$

in der gewählten Darstellung ergeben sich Vektoren für

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \Rightarrow S^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$
$$= \frac{3}{4}\hbar^2$$

Superposition

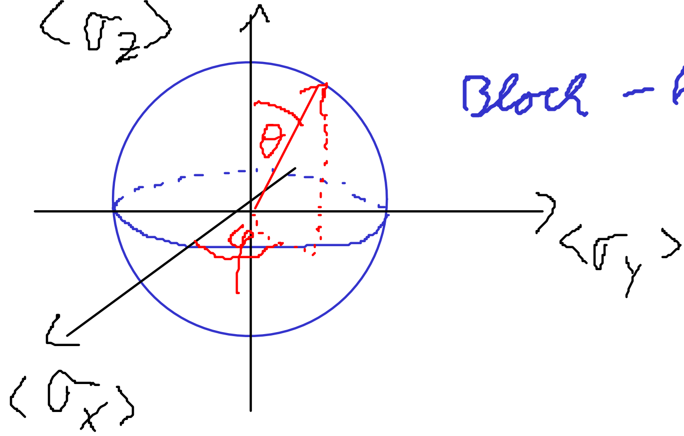
$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \quad ; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$
$$= e^{i\frac{\chi}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\varphi}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}|-\rangle\right)$$

Erwartungswerte

$$\langle\sigma_z\rangle = \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle = (\alpha^* \mid \beta^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$= |\alpha|^2 - |\beta|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

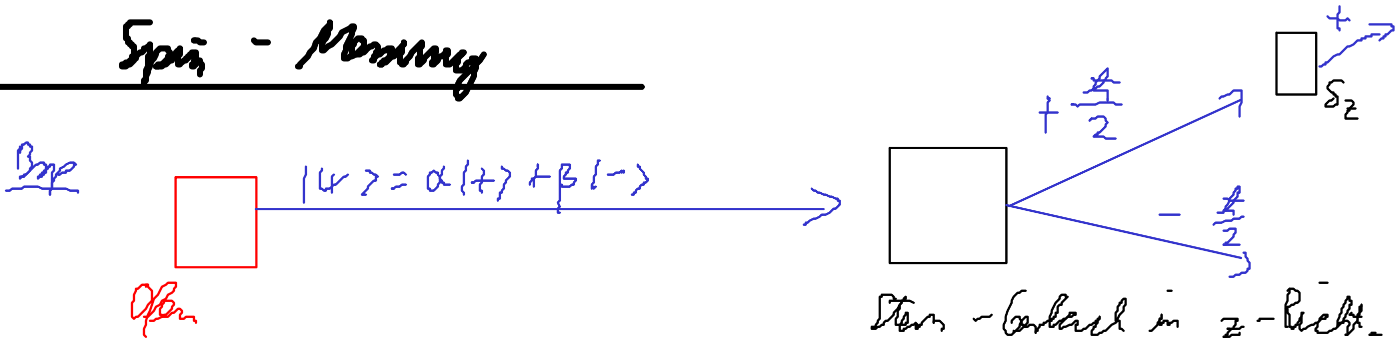
$$\langle\sigma_x\rangle = \sin\theta\cos\varphi$$
$$\langle\sigma_y\rangle = \sin\theta\sin\varphi$$



Bloch - Kugel

Beachte aber das $\quad \Delta\sigma_x \, \Delta\sigma_y \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\sigma_x, \sigma_y] \rangle \right| = |\langle\sigma_z\rangle|$

Spin - Messung



1) Messung von S_z

$$S_z |\nu\rangle_z = \nu \frac{\hbar}{2} |\nu\rangle_z$$

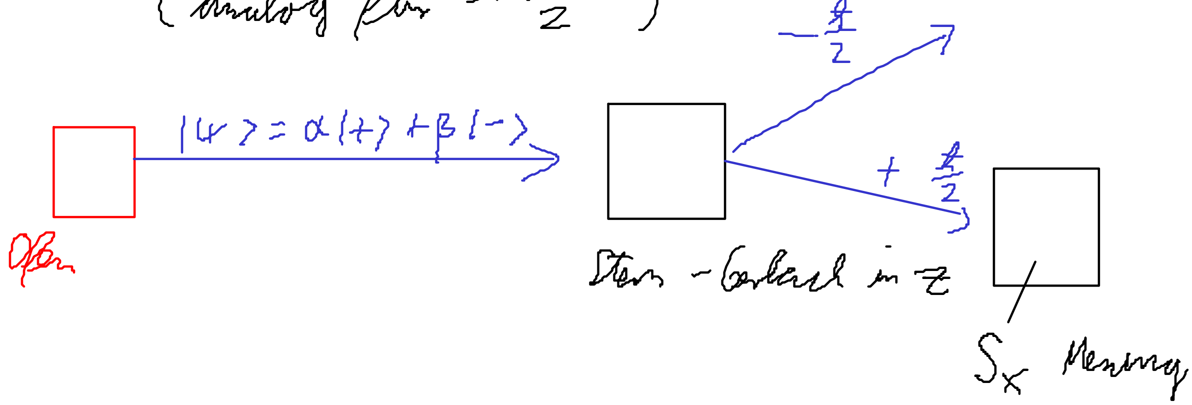
Wahrscheinlichkeit, $+\frac{\hbar}{2}$ zu finden ist $|\langle + | \psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$

Danach ist der Zustand $|+\rangle_z$

Weitere Messungen liefern mit Sicherheit $+\frac{\hbar}{2}$

(analog für $-\frac{\hbar}{2}$)

2)



Messung von S_x : $\quad S_x|\nu\rangle_x = \nu \frac{\hbar}{2} |\nu\rangle_x$

$$\nu = +, - \qquad |\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z \right)$$

$|\psi\rangle = |+\rangle_z$ Messe $S_x = \pm\frac{\hbar}{2}$ mit WS

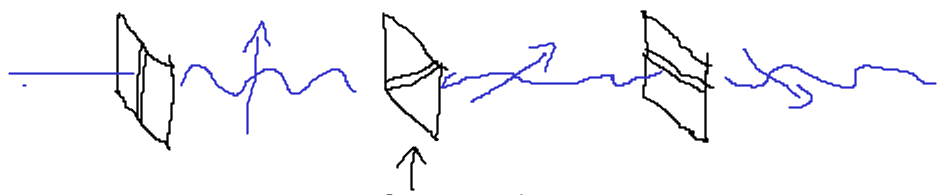
$$|{}_x\langle +|+\rangle_z|^2 = \frac{1}{2}$$

damit ist $|\psi\rangle = |+\rangle_x$

3) Messung von S_z

erhalte $S_z = +\frac{\hbar}{2}$, $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ beide mit WS $\frac{1}{2}$

Vgl. Optik mit Pol. - Filter



ohne den kommt nichts durch

3.2 Spin - Dynamik

Kohärente Oszillation

Spin im Magnetfeld in z - Richtung

$$H = -g\frac{\mu}{\hbar}\vec{S}\cdot\vec{B} = -\frac{g\mu}{2}B\sigma_z = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$$

Larmor - Frequenz $\hbar\omega_0 = g\mu B$ ($\hbar\omega_0 > 0$, als Positronen)

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & +\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

Grundzustands - energie $E_g = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$

angeregt $E_e = \frac{\hbar\omega_0}{2}$

g = ground, e = excited State

vergl. Diagonalform

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & & 0 \\ & E_1 & \\ 0 & & E_2 \ldots \end{pmatrix}$$

2 Möglichkeiten alles drehen, weil Elektronen negativ geladen sind, oder ignorieren und mit Ladung q (statt $|e|$) rechnen.
Wir nehmen q, daher ist Spin mal parallel mal antiparallel, da $q = -e \Rightarrow \mu < 0$

Für $\omega_0 > 0$ (pos. Ladung) hat $H = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$
die übliche Anordnung $\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$ und $|\psi_g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für $\omega < 0$ (neg. Ladung) ist diese übliche Konvention nicht eingehalten.
$\Rightarrow$ entweder $H = \begin{pmatrix} E_e & 0 \\ 0 & E_g \end{pmatrix}$ nehmen
oder alles umdrehen $|+\rangle \longrightarrow |-\rangle$; $|-\rangle \longrightarrow |+\rangle$

$$|\psi(t=0)\rangle = \alpha_0 |+\rangle + \beta_0 |-\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i H \frac{t}{\hbar}\right) |\psi(0)\rangle$$

$$= \exp\left(\frac{i}{2}\omega_0 t \sigma_z\right) |\psi(0)\rangle$$

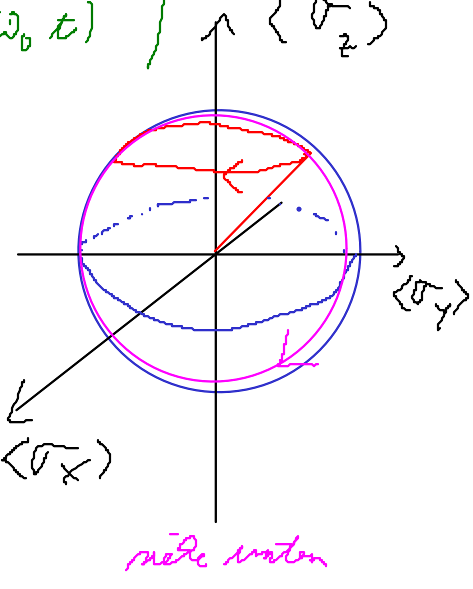
$$= \exp\left(\frac{i}{2}\omega_0 t\right) \alpha |+\rangle + \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_0 t\right) \beta |-\rangle$$

$$= \exp\left(i \frac{\chi}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \exp\left(-\frac{i}{2}(\varphi_0 - \omega_0 t)\right) \\ \sin\frac{\theta}{2} \exp\left(+\frac{i}{2}(\varphi_0 - \omega_0 t)\right) \end{pmatrix}$$

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \cos\theta_0$$

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = \sin\theta_0 \cos(\varphi_0 - \omega_0 t)$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = \sin\theta_0 \sin(\varphi_0 - \omega_0 t)$$



Kohärente Oszillation:
verschiedene Zeitabhängigkeiten der EV führt zu Oszillationen geeigneter Messgrößen

(manchmal fälschlicherweise als Rabi-Oszillation genannt)

Frequenz ist ω_0

also $\langle \vec{\sigma} \rangle \left(t = \frac{2\pi}{\omega_0} \right) = \langle \vec{\sigma} \rangle (0)$

Zustand $| \psi (t = \frac{2\pi}{\omega_0}) \rangle = - | \psi (t = 0) \rangle$

erst $| \psi (t = \frac{4\pi}{\omega_0}) \rangle = | \psi (0) \rangle$

Der Zustand "rotiert" halb so schnell wie die Observablen

Drehung um Achse

Angenommen $\vec{B}$ zeigt (ab $t = 0$) in x-Richtung

$$H = - g \frac{\mu}{2} B_x \sigma_x \quad ; \quad U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{i \rho \sigma_x}$$

zeta $\rho = \frac{g \mu}{2 \hbar} B_x \, t$

Lösungsmöglichkeit: Entwicklung von $| \psi \rangle$ in Basis von σ_x

Alternativ:

2) $$\exp(i \rho \sigma_x) = 1 + i \rho \sigma_x - \frac{1}{2!} \rho^2 \underbrace{\sigma_x^2}_{\mathbb{1}} - \frac{i}{3!} \rho^3 \underbrace{\sigma_x^3}_{\sigma_x}$$

$$= \cos(\rho) \mathbb{1} + i \sin(\rho) \sigma_x$$

$$\Rightarrow \quad | \psi(t) \rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\cos(\rho) \mathbb{1} + i \sin(\rho) \sigma_x \right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\rho & i \sin\rho \\ i \sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

Vereinfachung $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varrho \\ i \sin \varrho \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle \sigma_z \rangle (t) = \cos 2\varrho = \cos\left(\frac{g\mu B_x}{\hbar} t \right)$$

$$\langle \sigma_x \rangle (t) = 0$$

$$\langle \sigma_y \rangle (t) = \sin 2\varrho$$

Drehung um x-Achse mit Frequenz $\frac{g\mu B_x}{\hbar}$

Drehung siehe oben

für bel. α_0 β_0 $\Rightarrow$ Drehung um x-Achse mit Freq. $\frac{g\mu B_x}{\hbar}$

Allgemein: Drehung um Achse $\hat{u}$

$$R_{\hat{u}}(\alpha) = \exp(-i\alpha \vec{S}\cdot\vec{u}/\hbar) = \exp(-i\tfrac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{u})$$

$$= \cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) \mathbb{1} - i\vec{\sigma}\hat{u} \sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$R_{\hat{u}}(2\pi) = \mathbb{1}$ aber $A' = R_{\hat{u}}(2\pi)\, A\, R^{+}_{\hat{u}}(2\pi) = A$

$$R_u(4\pi) = \mathbb{1}$$