Nachtrag letzte Vorlesung $\quad \frac{1}{V}\int d^3r\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,(\vec{E}^2+\vec{B}^2) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r \sum_{\substack{k,n\\k',n'}} \sqrt{\cdots}_k \sqrt{\cdots}_{k'} \frac{\omega_k}{c}\frac{\omega_{k'}}{c}\hat{e}_{k'n'}\hat{e}_{kn}\,(\alpha_{k_1}\ldots + \vec{B}^2)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\sum_{kn}\frac{2\pi\hbar^2c^2}{\omega_k}\frac{\omega_k^2}{c^2}\Big[(\alpha_{kn}\alpha^*_{kn}+\alpha^*_{kn}\alpha_{kn}) + (\alpha_{kn}\alpha_{-kn}e^{-2i\omega_k t}+\alpha^*_{kn}\alpha^*_{-kn}e^{2i\omega_k t})\Big]$$

$$+\frac{1}{8\pi}\sum_{kn}\frac{2\pi\hbar^2c^2}{\omega_k}\Big[\underbrace{k^2}_{\substack{(k\times e_{kn})(k\times e_{kn})\\ \vec{k}=\vec{k}'}}(\alpha_{kn}\alpha^*_{kn}+\alpha^*_{kn}\alpha_{kn}) - \underbrace{k^2}_{\substack{(k\times e_{kn})(-k\times e_{kn})\\ \vec{k}'=-\vec{k}}}(\alpha_{kn}\alpha^*_{kn}e^{-2i\omega t}+\ldots)\Big]$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\sum_{kn}\frac{2\pi\hbar^2c^2}{\omega_k}\left(\frac{\omega_k^2}{c^2}+k^2\right)(\alpha_{kn}\alpha^*_{kn}+\alpha^*_{kn}\alpha_{kn})$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\sum_{kn}\hbar\omega_k\,(\alpha_{\vec{k}n}\alpha^*_{\vec{k}n}+\alpha^*_{\vec{k}n}\alpha_{\vec{k}n})}$$

Quantisierung (Hypothese)

ersetze $\alpha_{\vec{k}n}$ durch $a_{\vec{k}n}$, $\alpha^*_{\vec{k}n}$ durch $a^\dagger_{\vec{k}n}$

mit $[a_{\vec{k}n}, a^\dagger_{\vec{k}'n'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{nn'}$ $\quad [a_{\vec{k}n}, a_{\vec{k}'n'}] = [a^\dagger_{\vec{k}n}, a^\dagger_{\vec{k}'n'}] = 0$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}n}\hbar\omega_k\,(a_{\vec{k}n}a^\dagger_{\vec{k}n}+a^\dagger_{\vec{k}n}a_{\vec{k}n})$$

$$\boxed{H = \sum_{\vec{k}n}\hbar\omega_k\,\left(a_{\vec{k}n}a^\dagger_{\vec{k}n}+\frac{1}{2}\right)}$$

Eigenzustände = „Photonenzahlzustände

$$|n_{\vec{k}_1n_1}, n_{\vec{k}_2n_2},\ldots\rangle = |\{n_{\vec{k}n}\}\rangle = \prod_{\vec{k}n}\frac{(a^\dagger_{\vec{k}n})^{n_{\vec{k}n}}}{\sqrt{n_{\vec{k}n}!}}\underbrace{|0,0,\ldots\rangle}_{=|0\rangle}$$

Energie $\quad n_{\vec{k}n} = 0,1,2,\ldots$

$$\boxed{E_{|\{n_{\vec{k}n}\}\rangle} = \sum_{\vec{k}n}\hbar\omega_{\vec{k}n}\left(n_{\vec{k}n}+\frac{1}{2}\right)}$$

analog gilt $\quad P = \sum_{\vec{k}n}\hbar\vec{k}\,a^\dagger_{\vec{k}n}a_{\vec{k}n}$

Photonenzahloperator $\quad \hat{n}_{\vec{k}n} = a^\dagger_{\vec{k}n}a_{\vec{k}n} \qquad \hat{n}_{k_0n_0}|\{n\}\rangle = n_{k_0n_0}|\{n\}\rangle$

4.3 Wechselwirkung vom Atom-Strahlungsfeld (cgs Einheiten)

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 + q\,U(\vec{r},t) + V(\vec{r})}$$

q: Ladung des Teilchens $\qquad q = -|e|$

U: externes Potential

V: atomares Potential

Eichtransformation (C.T Kap. 3.15)

$$\vec A \longrightarrow \vec A' = \vec A + \nabla \chi(\vec r,t)$$
$$U \longrightarrow U' = U - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec r,t)$$
$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi(\vec r,t)\exp\left[i\frac{q}{\hbar c}\chi(\vec r,t)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \vec E &= -\nabla U - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec A \\ \vec B &= \nabla\times\vec A \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= H\psi \end{aligned}\right\}$$ alles ungeändert

Strahlungseichung: $U = 0$, $\operatorname{div}\vec A = 0 \Longleftrightarrow [\vec p, \vec A] = 0$

Dipolnäherung $\vec A(\vec r,t) = \vec A(\vec r_0,t)$ $\vec r_0$: Ort des Kernes

gültig, wenn λ des Strahlungsfeldes $\lambda \gg$ Größe des Atoms

$$\Rightarrow \boxed{H = H_0 + H_1}$$

$\underline{H_0} = \frac{p^2}{2m} + V(\vec r) \longrightarrow$ Atomzustände

$$\underline{H_1} = -\frac{q}{cm}\vec p\cdot\vec A(\vec r_0,t) + \underbrace{\frac{q^2}{2mc^2}\vec A^2}_{\text{Diamagnetismus (schwach)}}$$

andere Eichung

wähle $\chi = -\vec A(\vec r_0,t)\,\vec r \longrightarrow \vec A'(\vec r,t) = \vec A(\vec r,t) - \vec A(\vec r_0,t) \approx 0$

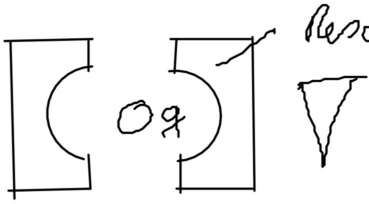
$$\Rightarrow \boxed{H_1 = -q\,\vec E(\vec r_0,t)\,\vec r} \qquad U' = \frac{1}{c}\dot{\vec A}(\vec r_0,t)\,\vec r = -\vec E(\vec r_0,t)\,\vec r$$

Zwei-Zustands-Atom

Oft sind wir interessiert an einer Resonanzsituation

hier: Energieunterschiede des Atoms (zwischen zwei Zuständen)

ΔE in Resonanz mit dem Strahlungsfeld wird $\Delta E \approx \hbar\omega_0$



Resonator für Strahlungsfeld

Cavity quantum electrodynamics

Dann „gemischt" es nur die 2 Zustände des Atoms miteinander

zB. Grundzustand $|g\rangle$ mit E_g ———— E_e

1 angeregter Zustand $|e\rangle$ mit E_e ———— E_g

$$H_{0\,\text{effektiv}} = E_g|g\rangle\langle g| + E_e|e\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & E_e \end{pmatrix}$$

oft wird $E_g = 0$ gesetzt $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_e \end{pmatrix}$ oder mit $\hbar\omega_{eg} = E_e - E_g$

symmetrisch $E_g + E_e = 0 \Rightarrow \boxed{H = -\frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z}$

WW mit Strahlungsfeld $H = -q\vec r \vec E(\vec r, t)$ $\quad \vec r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$H = -\vec E(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)\, q\vec r\, (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$

$\langle g|\vec r|g\rangle = \langle e|\vec r|e\rangle = 0$ aus Symmetriegründen

$H = -\vec E(\vec p_{ge}\cdot|g\rangle\langle e| + \vec p_{eg}|e\rangle\langle g|)$

mit $\boxed{\vec p_{ge} = \langle g|q\vec r|e\rangle = \vec p_{eg}^{\,*}}$ Dipolmatrixelement

$$\boxed{H_1 = -\begin{pmatrix} 0 & \vec p_{ge}\vec E \\ \vec p_{ge}^{\,*}\vec E & 0 \end{pmatrix}}$$

klassisches elektrisches Feld

z.B. $\vec E(t) = E_0\hat e_x\cos(\omega t)$ mit $\hbar\omega \approx \hbar\omega_{eg}$

⇒ Rabi-Oszillation (verwende noch RWA), erlaubt das Atom in kontrollierter und kohärenter Weise vom $|g\rangle$ in $|e\rangle$ und zurück zu drehen (auch Superpos. $(\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle)$)

Atom im quantenmech. Strahlungsfeld

$H = H_0 + H_F - q\vec r\vec E(\vec r_0)$ $\quad H_0 = -\frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z$ $\quad \vec p_{eg} = \vec p_{ge}$ = reell

Strahlungsfeld $H_F = \sum_{\vec k n}\hbar\omega_k(a^+_{\vec k n}a_{\vec k n} + \frac{1}{2})$

$\vec E(\vec r_0) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec k n}\sqrt{2\pi\hbar\omega_k}\,\hat e_{\vec k n}(a_{\vec k n} + a^+_{\vec k n})$ (Schrödinger Bild)

$e^{i\omega_k t}$ verschwindet, außerdem $e^{\pm i\vec k\vec r_0}$ Phasenfaktor wird weggelassen

⇒ $H_1 = -p_{ge}(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|)\sum_{\vec k n}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\,\hat e_{\vec k n}(a_{\vec k n} + a^+_{\vec k n})$

$$\boxed{H = \hbar\sum_{\vec k n} g_{\vec k n}\sigma_x(a_{\vec k n} + a^+_{\vec k n})}$$

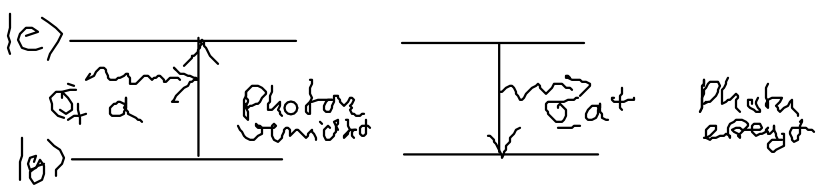
mit $g_{\vec k n} = -\vec p_{ge}\,\hat e_{\vec k n}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\,\frac{1}{\hbar}$

$\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_-$ $\quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_+|g\rangle = |e\rangle$

$\sigma_-|e\rangle = |g\rangle$

⇒ $\sigma_x(a_{\vec k n} + a^+_{\vec k n})$

$= \sigma_+ a + \sigma_- a^+ + \sigma_+ a^+ + \sigma_- a$



$\sigma_+ a^+$ und $\sigma_- a$ haben keine einfache Erklärung in RWApproximation vernachlässigbar