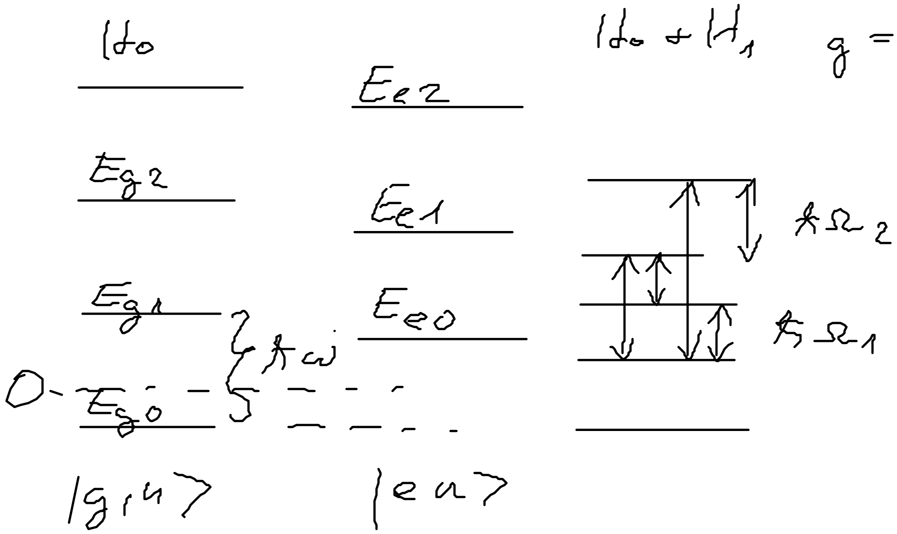
$$\boxed{H = \underbrace{-\frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a}_{H_0} + \underbrace{\hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)}_{H_1}}$$



$$E_0 = -\frac{\hbar\omega_{eg}}{2}$$

$$|\Psi_0\rangle = |g,0\rangle$$

$$E_{\nu,\mp} = \hbar\omega\left(\nu - \tfrac{1}{2}\right) \mp \hbar\frac{\Omega_\nu}{2}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots$$

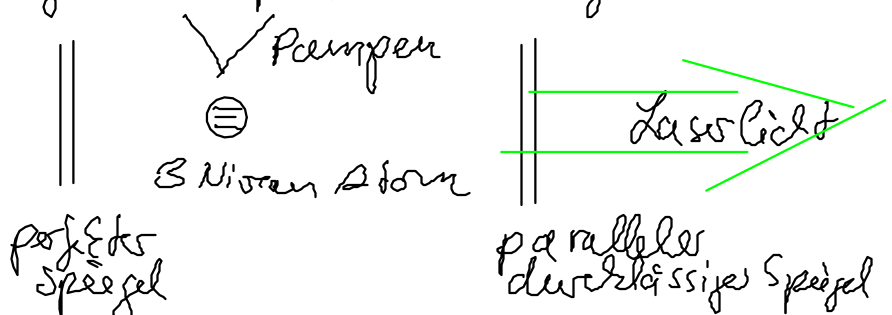
$$\Omega_\nu = \sqrt{4g^2\nu + (\omega_{eg} - \omega)^2}$$

Eigenzustände:

für $\omega_{eg} = \omega$ $\quad \boxed{|\Psi_{\nu,\mp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e,\nu-1\rangle \pm |g,\nu\rangle\right)}$ $\quad g > 0$

4.5 Der Laser

Light amplification by stimulated emission of radiation

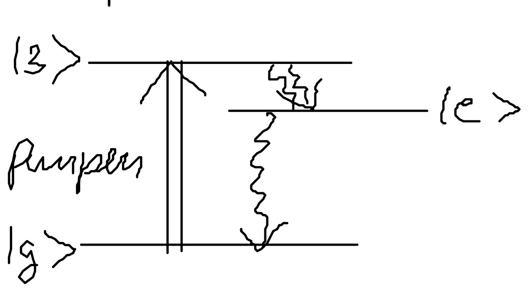


typisches Pumpen: in kohärenter Anregung $|g\rangle \to |3\rangle$

dann schneller Zerfall $|3\rangle \to |e\rangle$

$|e\rangle$ sei metastabil, d.h. Zerfall $|e\rangle \to |g\rangle$ ist schwach

$\Rightarrow$ Populationsinversion $P_e > P_g$



- P_e = Wahrscheinlichkeit, dass Atom im Zustand $|e\rangle$ ist
- Thermische Besetzung $\Rightarrow P_g > P_e$
- Pumpen $\to$ Inversion $\Rightarrow d_0 = \rho_g^{(0)} - \rho_e^{(0)} < 0$

- Die Spiegel + Resonanzkav. $\Big\} \Rightarrow$ selektion ein k mit $\omega_{eg} = \omega_k$

$$\boxed{H = \sum_{\nu=1}^{N} -\frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z^{\nu} + \hbar\omega a^\dagger a}$$

N sehr groß   ein [illegible] i $\omega_i^a = \omega$

für $|\phi\rangle = \alpha|e\rangle + \beta|g\rangle = \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle\phi|\sigma_z|\phi\rangle = |\beta|^2 - |\alpha|^2 = P_g - P_e$

Heisenberg-BGL:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} O_H = [O_H, H]}$$ O_S nicht explizit zeitabhängig

(alle im H.B)

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_z^\nu &= 2ig(\sigma_+^\nu a - \sigma_-^\nu a^\dagger) \qquad n = a^\dagger a\\
\frac{d}{dt} n &= ig\sum_\nu (a\sigma_+^\nu - a^\dagger\sigma_-^\nu)\\
\frac{d}{dt}(\sigma_+^\nu a) &= -i\underbrace{(\omega-\omega_{eg})}_{\delta\omega \text{ detuning}}\sigma_+^\nu a + ig\left(\sigma_z^\nu a^\dagger a - \sum_\mu \sigma_+^\nu \sigma_-^\mu\right)
\end{aligned}}$$

typisch für Momentengleichungen ist die Kopplung an jeweils höhere Momente

- Betrachte Erwartungswerte in noch zu bestimmenden Zustand

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle n\rangle &= ig\sum_\nu\left(\langle\sigma_+^\nu a\rangle - \langle\sigma_-^\nu a^\dagger\rangle\right) - k(\langle n\rangle - n_{th})\\
\frac{d}{dt}\langle\sigma_+^\nu a\rangle &= -i\delta\omega\langle\sigma_+^\nu a\rangle + ig\left(\langle\sigma_z^\nu n\rangle - \cancel{\sum_\mu\langle\sigma_+^\nu\sigma_-^\mu\rangle}\right) - \gamma\langle\sigma_+ a\rangle\\
\frac{d}{dt}\langle\sigma_z^\nu\rangle &= 2ig\left(\langle\sigma_+^\nu a\rangle - \langle\sigma_-^\nu a^\dagger\rangle\right) - \Gamma_1\left(\langle\sigma_z^\nu\rangle - \underbrace{d_0}_{\text{Pumpen}}\right)
\end{aligned}}$$

Vernachlässigbar

- Mittle auch noch statistisch (lineare Gleichungen ändern sich nicht)
- erlaube noch relaxation (phänomenologisch)

- $\Gamma_1 = \frac{1}{T_1}$ siehe Blochgleichungen
  $\langle\sigma_z\rangle$ relaxiert zum Wert, der durch pumpen festgelegt wird
- k für Strahlungsfeld
- $\gamma = \frac{1}{T_2} + \frac{k}{2}$

- **Stationäre Lösung:** $n \nearrow 0 \atop \searrow \gg 1$ $\langle\sigma_z^\nu n\rangle \gg \sum_\mu\langle\sigma_+^\nu\sigma_-^\mu\rangle$

  $\langle\sigma_z^\nu n\rangle \approx \langle\sigma_z^\nu\rangle\langle n\rangle$

- **3 Gleichungen mit 3 Unbekannten**

  $0 = -2gN\,\mathrm{Im}(\langle\sigma_+ a\rangle) - k(\langle n\rangle - n_{th})$

  $0 = -i(\delta\omega + \gamma)\langle\sigma_+ a\rangle + ig\langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle$

$$0 = -4g\,\mathrm{Im}\langle\sigma_+ a\rangle - \Gamma_1(\langle\sigma_z\rangle - d_0)$$

$$\mathrm{Im}(\langle\sigma_+ a\rangle) = \frac{\gamma}{\delta\omega^2+\gamma^2}\langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle$$

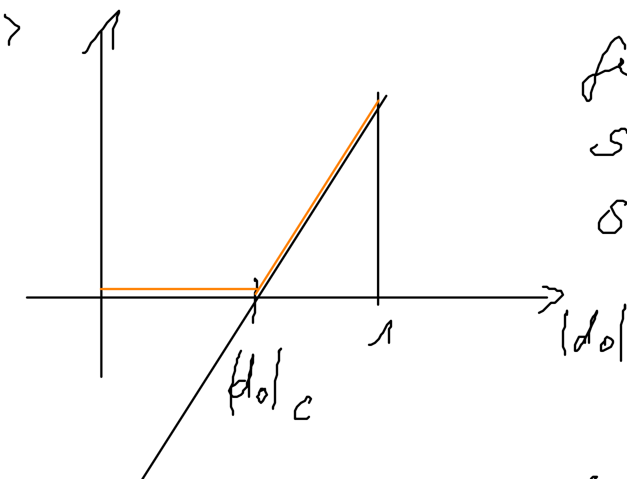
$$\langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle = -\tilde{n}_0(\langle\sigma_z\rangle - d_0) \quad \text{und } \tilde{n}_0 = \frac{\Gamma_1}{4g^2\frac{\gamma}{\delta\omega^2+\gamma^2}}$$

$$\langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle = -\frac{2\kappa}{\Gamma_1}\frac{\tilde{n}_0}{N}(\langle n\rangle - n_{th})$$

Bei tiefen Temperaturen T: $n_{th} \approx 0$

1. Lösung $\langle n\rangle = 0 \qquad \langle\sigma_z\rangle = d_0$

2. Lösung $\langle\sigma_z\rangle = -\frac{2\kappa}{\Gamma_1 N}\tilde{n}_0 \qquad \langle n\rangle = -\tilde{n}_0 + |d_0|\frac{\Gamma_1 N}{2\kappa} \qquad d_0 < 0$



für $|d_0| > |d_0|_c$
stark gepumpt
steigt $\langle n\rangle$ stark an.

Bemerkungen: $\langle a\rangle \neq 0$ im Laserzustand ($\neq |n\rangle$)

Die Analyse zeigt, dass der Laser-Zustand ein „kohärenter" Zustand ist $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad \langle n\rangle = \langle\alpha|n|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$

$\Rightarrow \langle\alpha|a|\alpha\rangle = \alpha \qquad \langle a\rangle$ hat Betrag und Phase (Mittelt sich nach langer Zeit zu 0)

- kohärenter Zustand befolgt die Poisson-Statistik

$$P_\alpha(n) = e^{-\langle n\rangle}\frac{\langle n\rangle^n}{n!}$$