Die Analyse zeigt, dass Laser-Zustand ein kohärenter Zustand ist: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$\langle n\rangle = \langle\alpha|n|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^+ a|\alpha\rangle = |\alpha^2|$

$\Rightarrow \langle\alpha|a|\alpha\rangle = \alpha$

$\langle a\rangle$ hat Betrag und Phase $\Rightarrow$ Mittelt sich nach langer Zeit zu 0

kohärenter Zustand befolgt Poisson-Statistik

$$P_\alpha(n) = e^{-\langle n\rangle} \frac{\langle n\rangle^n}{n!}$$

Kap V Quantenstatistik

5.1 Dichtematrix / Dichteoperator

Reine Zustände $|\psi\rangle$ nach $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$

$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$

$-i\hbar \frac{d}{dt}\langle\psi| = \langle\psi|H$

wiederholte Messungen liefern den Erwartungswert $\langle\psi|A|\psi\rangle$

quantenmech. Unschärfe $\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} \neq 0$ i.A.

Umschreiben $\langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_n \langle\psi|A|n\rangle\langle n|\psi\rangle$

$$= \sum_n \langle n|\psi\rangle\langle\psi|A|n\rangle$$

$$= \mathrm{trace}(|\psi\rangle\langle\psi|A)$$

$$P_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$= \mathrm{trace}(P_{|\psi\rangle}A) = \sum_n \langle n|P_{|\psi\rangle}A|n\rangle$$

$$= \sum_{n,n'} \langle n|P_{|\psi\rangle}|n'\rangle\langle n'|A|n\rangle$$

$$= \sum_{n,n'} (\rho_{|\psi\rangle})_{nn'} A_{n'n}$$

Gemischte Zustände

Oft kennen wir nur die klassische Wahrscheinlichkeit $W_{|\psi\rangle}$, dass das System in den Zuständen $|\psi\rangle$ ist

$$\sum_{|\psi\rangle} W_{|\psi\rangle} = 1$$

Ergebnis vieler Messungen: quantenstatistischer Mittelwert.

$$\langle \bar{A} \rangle = \sum_{|\psi\rangle} W_{|\psi\rangle} \langle \psi | A | \psi \rangle$$

$$= \sum_{|\psi\rangle} \sum_n W_{|\psi\rangle} \langle \psi | A | n \rangle \langle n | \psi \rangle$$

$$= \sum_{\psi, n} \langle n | \psi \rangle W_\psi \langle \psi | A | n \rangle$$

$$= tr \Big(\underbrace{\sum_\psi |\psi\rangle W_\psi \langle \psi |}_{\hat{\rho}} A \Big)$$

nicht zwangsweise orthogonal

$$\hat{\rho} = \sum_\psi |\psi\rangle\langle\psi| W_\psi$$

Dichtematrix

$$= tr(\hat{\rho} A)$$

- Wenn $\hat{\rho}$ bekannt ist, erhalten wir alle q.-stat. Mittelwerte durch Spurbildung
- Normiert $\quad tr\, \hat{\rho} = 1$
- hermitisch $\quad \hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$
- positiv definit für alle $|\varphi\rangle$: $\quad \langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle \geq 0$
- $tr(\hat{\rho} A) = \sum_{n n'} \langle n | \hat{\rho} | n' \rangle \langle n' | A | n \rangle$

$$= \hat{\rho}_{nn'} A_{n'n}$$

- $\hat\rho$ ist in vorgegebener Basis i. A. nicht diagonal
- $\hat\rho$ kann diagonalisiert werden

$$\hat\rho = \sum_\lambda W_\lambda \, |\lambda\rangle\langle\lambda|$$ aber oft ist die Basis $|\lambda\rangle$ nicht physikalisch interessant

- Dichtematrizen beschreiben auch reine Zustände
  Dafür ist $W_\psi = 1$ nur für einen Zustand $|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \hat\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = P_{|\psi\rangle}$$

$\hat\rho$ ist Projektor, d. h. $\hat\rho^2 = \hat\rho$

äquivalent $\quad tr(\hat\rho^2) = 1 \quad (= tr(\hat\rho))$

für reine Zustände

Für gemischte Zustände gilt jedoch $tr(\hat\rho^2) < 1$

Zeitentwicklung

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat\rho(t) = i\hbar \sum_\psi W_\psi \left[\left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)\langle\psi| + |\psi\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\psi|\right)\right]$$

$$= \sum_\psi W_\psi \left[H|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|H\right]$$

$$= [H, \hat\rho]$$ **Liouville-Gleichung**

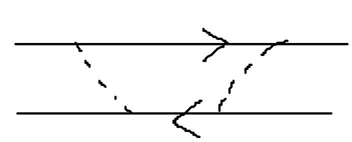
VZ andersrum als bei Heisenberg BGL

Alternative $\quad |\psi(0)\rangle = U(t, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$

$$\hat\rho(t) = U(t, t_0)\; \hat\rho(t_0)\; U^+(t, t_0)$$

Vorwärts $\qquad\qquad$ Rückwärts - Zeitentwicklung

Abr: in Realität sind Vor- und Rückwärts Zeitentwicklung gekoppelt

t_0  t

"Keldysh-Contour"

• Für H zeitunabhängig und Basis $|n\rangle$ mit

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{nn'} = \langle n | [H, \hat{\rho}] | n' \rangle$$
$$= (E_n - E_{n'}) \rho_{nn'}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{nn} = \text{konst}$$
$$\rho_{nn'}(t) = e^{-i(E_n - E_{n'})\frac{t}{\hbar}} \rho_{nn'}(0)$$

Diagonalelemente sind konstant

Nebendiagonalelemente oszillieren

Beispiel

Spin $\frac{1}{2}$ in reinem Zustand

$$|\psi_0\rangle = \alpha_0 |+\rangle + \beta_0 |-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| = (\alpha_0 |+\rangle + \beta_0 |-\rangle)(\alpha_0^* \langle +| + \beta_0^* \langle -|)$$
$$= |\alpha_0^2| \, |+\rangle\langle +| + \alpha_0 \beta_0^* |+\rangle\langle -| + \beta_0 \alpha_0^* |-\rangle\langle +|$$
$$+ |\beta_0|^2 |-\rangle\langle -|$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha_0|^2 & \alpha_0 \beta_0^* \\ \beta_0 \alpha_0^* & |\beta_0|^2 \end{pmatrix}$$

damit z.B. $\langle \sigma_z \rangle = tr(\rho \sigma_z)$

Zeitentwicklung für $H = -\frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{i\omega_0 t}{2}\right) \alpha_0 |+\rangle + \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right) \beta_0 |-\rangle$$

einfachste Methode ?

$$\Rightarrow \quad \hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha_0 \beta_0^* \exp(i\omega_0 t) \\ \beta_0 \alpha_0^* \exp(-i\omega_0 t) & |\beta_0|^2 \end{pmatrix}$$

schnelle Oszillation der Nebendiagonalen

Ensemble von Spins

$$|\psi\rangle = e^{i\chi}\left[\,|\alpha| e^{i\frac{\varphi}{2}}\,|+\rangle + |\beta| e^{-i\frac{\varphi}{2}}\,|-\rangle\right]$$

mit $|\alpha|$ und $|\beta|$ fest

aber Phasen χ und φ sind nicht kontrolliert

$$\overline{e^{i\varphi}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\rho} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & |\alpha||\beta| e^{i\varphi} \\ |\alpha||\beta| e^{-i\varphi} & |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_+ & \\ & \rho_- \end{pmatrix}$$

Übergang von QM zu klass. Statistik

mit $\rho_+ = |\alpha|^2$ WS, im Zustand $|+\rangle$ zu sein

5.2 Thermisches Gleichgewicht

Fundamentales Postulat der QM:

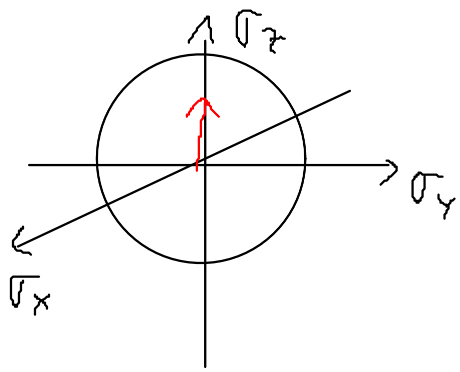
$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Thermisches Gleichgewicht beschrieben durch $\hat{\rho}$

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}) \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad Z = \mathrm{tr}\left(e^{-\beta H}\right)$$ Zustandssumme

$$\Rightarrow \quad \hat{\rho} = \frac{1}{e^{\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}} + e^{-\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}}} \begin{pmatrix} \exp\left(\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \langle \sigma_z \rangle = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\,\sigma_z) = \tanh\left(\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}\right)$$



Bsp HO

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})|n\rangle \qquad (n=0,1,\dots)$$

$$\hat{\rho}_{n'n} = \frac{1}{Z}\langle n'|e^{-\beta H}|n\rangle = \frac{\delta_{n'n}}{Z}\, e^{-\beta E_n}$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n}$$

$$= \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\rho}_{n'n} = \delta_{n'n}\,(1-e^{-\beta\hbar\omega})\, e^{-\beta\hbar\omega n}$$

$\langle \overline{n} \rangle = n_{th}$ therm. Mittelwert

$$= \sum_n \rho_{nn}\, n = \dots = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

Bose-Einstein Verteilung

nächstes mal: Entwicklung eines Teilsystems