Quantenstatistik

Dichtematrix $\quad \hat{\rho} = \sum w_\psi |\psi\rangle\langle\psi|$

$\Rightarrow \quad \overline{\langle A \rangle} = tr \{ \hat{\rho} A \}$

$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [H, \hat{\rho}]$ Liouvillegl.

$\hat{\rho}(t) = U(t,t_0)\, \hat{\rho}(t_0)\, U^+(t,t_0)$

reiner Zustand $\quad \hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad tr\, \hat{\rho}^2 = 1$

gemischte Zustände: $tr(\hat{\rho}^2) < 1$

therm. Gleichgewicht: $\quad \hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \; Z = tr\,\hat{\rho}$

5.3 Teilsysteme ("Verkürzung")

Angenommen wir haben 2 Teilsysteme (1) und (2)

mit $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$

Basis in $\mathcal{H}$: $|u_n\rangle |v_p\rangle \quad$ mit $|u_n\rangle \in \mathcal{H}^{(1)}$

$|v_p\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$

Gesamtsystem sei durch Dichtematrix $\hat{\rho}^{(1\otimes 2)}$ beschrieben

$$\Rightarrow \langle A^{(1\otimes 2)} \rangle = tr \{ \hat{\rho}^{1\otimes 2} A^{1\otimes 2} \}$$

$$= \sum_{n,p} \langle u_n | \langle v_p | \rho^{1\otimes 2} | v_p \rangle | u_n \rangle$$

Häufig betrachten wir nur ein Teilsystem explizit und nur Observablen $A^{(1)}$ in diesem Teilsystem

$$A^{(1\otimes 2)} = A^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)}$$

$$\Rightarrow \overline{\langle A^{(1)} \rangle} = \sum_n \langle u_n | \underbrace{\sum_p \langle v_p | \hat{\rho}^{1\otimes 2} | v_p \rangle}_{\text{reduzierte Dichtematrix } \hat{\rho}^{(1)}_{red}} A^{(1)} | u_n \rangle$$

$\Rightarrow \langle \overline{A^{(1)}} \rangle = \mathrm{tr}\{ \rho_{red}^{(1)} A^{(1)} \}$

$\hat{\rho}_{red}^{(1)}$ ist auch Dichtematrix

Also: $\mathrm{tr}\, \hat{\rho}_{red} = 1$, hermitesch, positiv definit

Es gilt: $\mathrm{tr}\left(\rho_{red}^{(1)\,2}\right) < 1$ im Allgemeinen

beschreibt Gemische (außer für Spezialfälle)

auch wenn $\hat{\rho}^{(1\otimes 2)}$ einen reinen Zustand beschreibt

Beispiel: Übungsaufgabe

- Diese Situation liegt bei allen makroskopischen Systemen vor (z.B. bei Katzen)
- Zugang zur Beschreibung von Dissipation in der QM
  dort ist System 2 ein Reservoir (z.B. Gasteilchen bei Brownscher Molekularbewegung)

5.4 Dephasierung und Relaxation (dephasing / Decoherence)

Dephasierung durch statische Unordnung

z.B. Spin im räumlichen schwankenden B-Feld

$$B = (B_0 + \delta B(\vec{r}))\, \hat{e}_z \qquad \overline{\delta B} = 0 \; ; \; \overline{\delta B^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow H = -\frac{\hbar}{2}(\omega_{eg} + \delta\omega)\, \sigma_z \qquad \overline{\delta\omega} = 0 \; ; \; \overline{\delta\omega^2} = \delta^2 \neq 0$$

Mittelung

Gauß - verteilt

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{gg}(0) & \rho_{ge}(0)\, e^{i(\omega_{eg} + \delta\omega)t} \\ \rho_{ge}(0)\, e^{-i(\omega_{eg} - \delta\omega)t} & \rho_{ee}(0) \end{pmatrix}$$

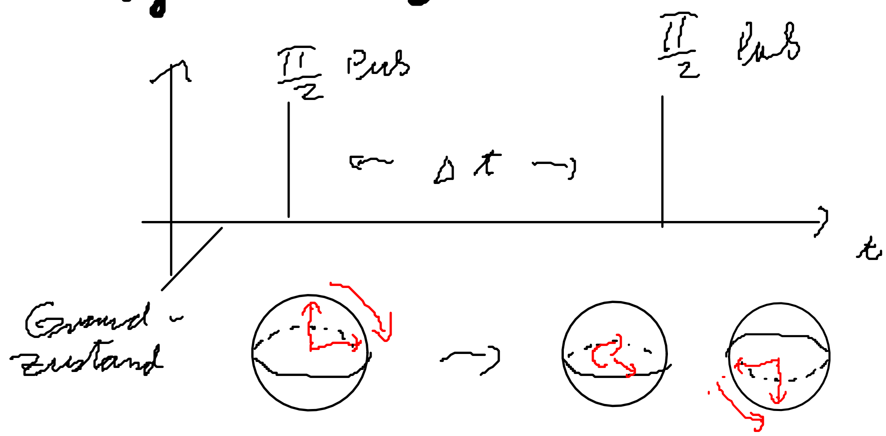
Mittelung über Ensemble von Spins

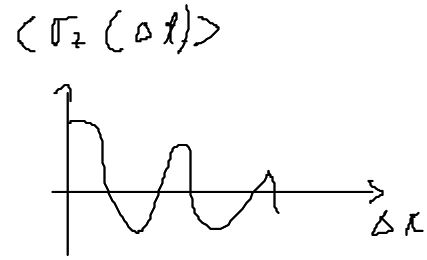
$$\overline{e^{i\delta\omega t}} = e^{-\frac{1}{2}\overline{(\delta\omega t)^2}}$$ (für Gaußverteilt $\delta\omega$)

$$= e^{-\frac{1}{2}\delta^2 t^2}$$

$$\tilde{\rho}(t) \xrightarrow[\text{zerfällt}]{} \begin{pmatrix} \rho_{gg}(0) & 0 \\ 0 & \rho_{ee}(0) \end{pmatrix}$$

Ramsey-Fringes





Zeitlich fluktuierende Felder

$$B(t) = B_0 + \delta B(t) \qquad \overline{\delta\omega} = 0$$

$$H = -\frac{\hbar}{2}\left(\omega_{eg} + \delta\omega(t)\right)\sigma_z \qquad \overline{\delta\omega(t)\,\delta\omega(t')} = 2\gamma^* \,\delta(t-t')$$

$H(t)$ aber trotzdem $[H(t_1), H(t_2)] = 0$

weißes Rauschen
Gauß verteilt

$$\Rightarrow \rho_{gg}(t) = \rho_{gg}(0)$$

$$\rho_{ge}(t) = \rho_{ge}(0)\, e^{i\omega_{eg}t}\, e^{i\int_0^t dt'\,\delta\omega(t')}$$

↑ Mitteln

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}\overline{\int_0^t dt'\,\delta\omega(t') \int_0^t dt''\,\delta\omega(t'')}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt' \int_0^t dt''\, \overline{\delta\omega(t')\,\delta\omega(t'')} = 2\gamma^* t$$

Nebendiagonale zerfallen auf Skala $\frac{1}{\gamma^*}$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg}(0) & \rho_{ge}(0) \\ & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Dekohärenz}]{} \begin{pmatrix} \rho_{gg}(0) & 0 \\ 0 & \rho_{ee}(0) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Relaxation}]{} \begin{pmatrix} \rho_{gg}^{th} & 0 \\ 0 & \rho_{ee}^{th} \end{pmatrix}$$

für $\gamma_1^{-1} \gg \gamma^*$ ist dies ein 2 stufiger Prozess wie oben.

Sonst beides gleichzeitig

die Form $H_1 = -\frac{1}{2} X(t)\, \sigma_x$

$$X_\omega = X^*_{-\omega}$$

Version 1: $X(t) = \sum_\omega X_\omega e^{i\omega t}$ sei klass. Feld

$\Rightarrow$ Übergangsrate nach goldener Regel

$$\gamma_{e\to g} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum \underbrace{\left(\langle g | X_\omega \sigma_x | e \rangle\right)^2}_{= |X_\omega|^2} \delta(\hbar\omega_{eg} - \hbar\omega) \propto |X_{\omega=\omega_{eg}}|^2$$

$$\gamma_{g\to e} \propto |X_{\omega=-\omega_{eg}}|^2 = \gamma_{e\to g}$$

Version 2 Berücksichtige, dass X auch eine QM-Größe

$$H = H_0 - \frac{1}{2} X \sigma_x + H_{reservoir}$$

z.B. $H_{reservoir} = \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \right)$

$---- \Longrightarrow \quad \dfrac{\gamma_{e \to g}}{\gamma_{g \to e}} = e^{-\frac{\hbar \omega_{eg}}{k_B T}}$

detaillierte Gleichgewicht

$\Rightarrow$ mit $H_0 = -\frac{1}{2}\omega_{eg}\sigma_z + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}$ "Störung"

$$\dot{\rho}_{gg} = -\frac{i}{\hbar}\left(\Delta \rho_{eg} - \Delta^* \rho_{ge}\right) - \gamma_{ge}\rho_{gg} + \gamma_{eg}\rho_{ee}$$

$$\dot{\rho}_{eg} = \frac{i}{\hbar}\left(\Delta \rho_{eg} - \Delta^* \rho_{ge}\right) - \gamma_{eg}\rho_{ee} + \gamma_{ge}\rho_{gg}$$

$$\dot{\rho}_{eg} = \frac{i}{\hbar}\Delta^*\left(\rho_{ee} - \rho_{gg}\right) - i\omega\rho_{eg} - \left(\gamma^* + \frac{\gamma_1}{2}\right)\rho_{eg}$$

$$\gamma_1 = \left(\gamma_{eg} + \gamma_{ge}\right)$$

Somit kann in die Liouville-Gleichung Dekohärenz und Relaxation berücksichtigt werden

$\rightarrow$ Beschränkung von Dissipation in QM