Quantenstatistik

Dichtematrix $\hat{\rho} = \sum_{|\psi\rangle} W_{|\psi\rangle} |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow \langle\hat{A}\rangle = \mathrm{tr}\{\hat{\rho}\hat{A}\}$

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = [H, \hat{\rho}]$ Liouville Gleichung

$\hat{\rho}(t) = U(t,t_0)\,\hat{\rho}(t_0)\,U^\dagger(t,t_0)$

reiner Zustand $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, $\mathrm{tr}\,\hat{\rho}^2 = 1$ (pure state)

gemischter Zustand $\mathrm{tr}\,\hat{\rho}^2 < 1$ (mixed state)

Spin im reinen Zustand $|\psi\rangle = \alpha_0|+\rangle + \beta_0|-\rangle$

$\Rightarrow \hat{\rho} = \begin{pmatrix} |\alpha_0|^2 & \alpha_0\beta_0^* \\ \alpha_0^*\beta_0 & |\beta_0|^2 \end{pmatrix}$ $\quad H = -\frac{\hbar\omega_0\sigma_z}{2}$ $\quad \hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} |\alpha_0|^2 & \alpha_0\beta_0^* e^{i\omega_0 t} \\ \alpha_0^*\beta_0 e^{-i\omega_0 t} & |\beta_0|^2 \end{pmatrix}$

therm. Gl. $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$ $\quad \beta = \frac{1}{k_B T}$ $\quad Z = \mathrm{tr}\,\hat{\rho}$

5.3 Teilsysteme (Verteilung)

- Angenommen wir haben zwei Teilsysteme (1) und (2)

mit $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ Basis in $\mathcal{H}$: $\{|u_n\rangle\otimes|v_p\rangle\}$ mit $|u_n\rangle \in \mathcal{H}^{(1)}$, $|v_p\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$

- Gesamtsystem sei durch Dichtematrix $\hat{\rho}^{(1\otimes 2)}$ beschrieben

$$\Rightarrow \boxed{\langle A^{(1\otimes 2)}\rangle = \mathrm{tr}\{\hat{\rho}^{(1\otimes 2)} A^{(1\otimes 2)}\} = \sum_{n,p} \langle u_n|\otimes\langle v_p|\hat{\rho}^{(1\otimes 2)} A^{(1\otimes 2)}|v_p\rangle\otimes|u_n\rangle}$$

Häufig betrachten wir nur 1 Teilchen explizit und nur Observablen

$A^{(1)}$ in diesem Teilsystem $A^{(1\otimes 2)} = A^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle A^{(1)}\rangle = \sum_n \langle u_n| \underbrace{\sum_p \langle v_p|\hat{\rho}^{(1\otimes 2)}|v_p\rangle}_{} A^{(1)}|u_n\rangle}$$

reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}_{red}^{(1)}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle A^{(1)}\rangle = \mathrm{tr}^{(1)}\{\hat{\rho}_{red}^{(1)} A^{(1)}\}}$$ ($\mathrm{tr}\,\hat{\rho}_{red}^{(1)} = 1$, hermitesch, pos. definit)

Es gilt $\mathrm{tr}\,(\hat{\rho}_{red}^{(1)})^2 < 1$ im Allgemeinen

beschreibt ein Gemisch (außer fast Spezialfälle)

auch wenn $\hat{\rho}^{(1\otimes 2)}$ einen reinen Zustand beschreibt.

- Beispiel in Übungsaufgabe
- Diese Situation liegt bei allen makroskopischen Systemen vor (z.B bei Wärmebädern)
- Zugang zur Beschreibung von Dissipation in QM

System (2) ist ein „Reservoir" (z.B. Gasteilchen bei Brown'scher Bewegung)

5.4 Dephasierung und Relaxation

Dephasing bzw. Decoherence

- Dephasierung durch statische Unordnung

z.B. Spin im räumlich schwankenden Magnetfeld

$B = (B_0 + \delta B(\vec r))\,\hat e_z \qquad \overline{\delta B} = 0 \qquad \overline{(\delta B^2)} \neq 0$ (Gaußverteilung)

$$\boxed{H = -\frac{\hbar}{2}(\omega_{eg} + \Delta\omega)\sigma_z \qquad \hat\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{gg}(0) & \rho_{ge}(0)e^{i(\omega_{eg}+\delta\omega)t} \\ \rho_{eg}(0)e^{-i(\omega_{eg}+\delta\omega)t} & \rho_{ee}(0) \end{pmatrix}}$$

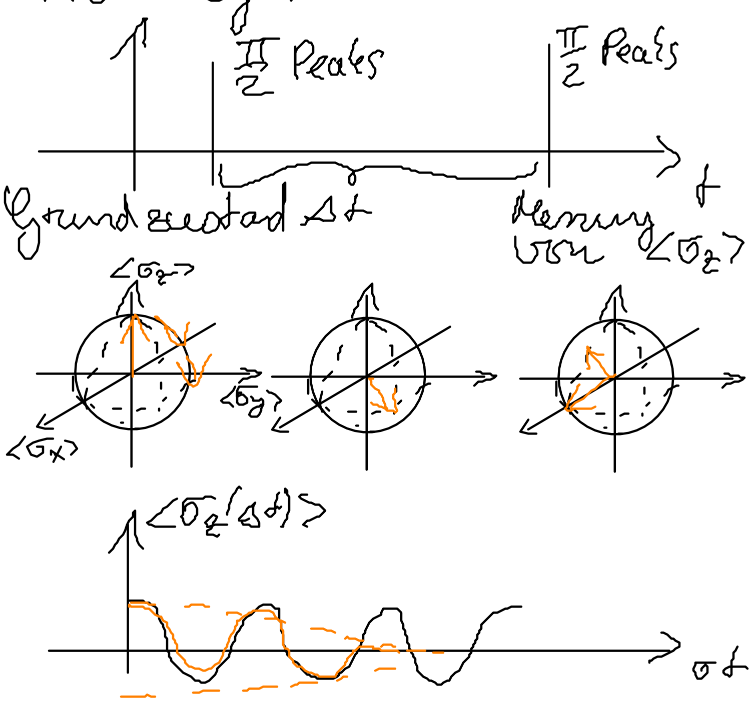
$\overline{\delta\omega} = 0 \qquad \overline{(\delta\omega^2)} = \delta^2 \neq 0$

Mittelung über Ensemble von Spins

$$\overline{e^{i\delta\omega t}} \underset{\text{Gauß-Vert.}}{=} e^{-\frac{1}{2}\overline{(\delta\omega t)^2}} = e^{-\frac{1}{2}\delta^2 t^2}$$

$$\hat\rho(t) \xrightarrow[\text{Zeitskala}]{\text{zerfällt auf}} \begin{pmatrix} \rho_{gg}(0) & 0 \\ 0 & \rho_{ee}(0) \end{pmatrix}$$

Ramsey Fringes



- **Zeitlich fluktuierende Felder**

$B(t) = B_0 + \delta B(t)$

$\overline{\delta\omega} = 0$

$H = -\frac{\hbar}{2}(\omega_{eg} + \delta\omega(t))\sigma_z$

$\overline{\delta\omega(t)\,\delta\omega(t')} = 2\gamma^* \delta(t-t')$

- δ-korreliert

≙ weißes Rauschen

- Gauß verteilt

$\Rightarrow \rho_{gg}(t) = \rho_{gg}(0)$ (auch ρ_{ee})

$$\rho_{ge}(t) = \rho_{ge}(0)e^{i\omega_{eg}t}\underbrace{\overline{\exp\left[i\int_0^t dt'\,\delta\omega(t')\right]}}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t dt' \int_0^t dt''\, \overline{\delta\omega(t')\,\delta\omega(t'')}\right]$$

$$= \exp[-\gamma^* t]$$

$\Rightarrow$ Nebendiag. zerfallen auf Skala $\frac{1}{\gamma^*}$

$$\int_0^t dt' \int_0^t dt''\, \overline{\delta\omega(t')\,\delta\omega(t'')} = 2\gamma^* t$$

$$\hat\rho: \begin{pmatrix} \rho_{gg}(0) & \rho_{ge}(0) \\ \dots & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Dekohärenz}]{t > \left\{\frac{1}{\gamma^*}, \frac{1}{\delta}\right.} \begin{pmatrix} \rho_{gg}(0) & 0 \\ 0 & \rho_{ee}(0) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Relaxation}]{t \gg \frac{1}{\gamma_1}} \begin{pmatrix} \rho_{gg}^{th} & 0 \\ 0 & \rho_{ee}^{th} \end{pmatrix}$$

für $\frac{1}{\gamma_1} \gg \gamma^*$ ist dies 2-stufiger Prozess

Ursache für Relaxation ist z.B. Störung der Form

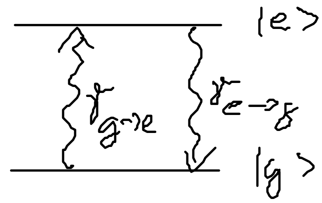
$\boxed{H_1 = -\frac{1}{2} X(t)\,\sigma_x}$ $\quad$ $\boxed{X(t) = \sum_\omega X_\omega e^{i\omega t}}$ sei klassisches Feld

$\Rightarrow$ **Übergangsrate** nach goldener Regel

$$\gamma_{e\to g} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_\omega \underbrace{|\langle g|X_\omega \sigma_x|e\rangle|^2}_{|X_\omega|^2}\,\delta(\hbar\omega_{eg} - \hbar\omega)$$

$$\propto |X_{\omega=\omega_{eg}}|^2$$

$$\gamma_{g\to e} \propto |X_{\omega=\omega_{eg}}|^2 = \gamma_{e\to g}$$



Version 2: Berücksichtige, dass X auch qm. Variable

$$\boxed{H = H_0 - \frac{1}{2} X\sigma_x + H_{reservoir}}$$

z.B. Strahlungsfeld $H_{reservoir} = \sum_k \hbar\omega_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})$

und $X \propto (a_k^\dagger + a_k)$ und Reservoir sei im therm. Gleichgewicht

... $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\gamma_{e\to g}}{\gamma_{g\to e}} = e^{-\frac{\hbar\omega_{eg}}{k_B T}}}$ detailliertes Gleichgewicht

mit $H_0 = -\frac{1}{2}\omega_{eg}\sigma_z + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dot\rho_{gg} = -\frac{i}{\hbar}(\Delta\rho_{eg} - \Delta^*\rho_{ge}) - \gamma_{ge}\rho_{gg} + \gamma_{eg}\rho_{ee}$$

$$\dot\rho_{ee} = \frac{i}{\hbar}(\Delta\rho_{eg} - \Delta^*\rho_{ge}) - \gamma_{eg}\rho_{ee} + \gamma_{ge}\rho_{gg}$$

$$\dot\rho_{eg} = \frac{i}{\hbar}\Delta^*(\rho_{ee} - \rho_{gg}) - i\omega_{eg}\rho_{eg} - \left(\gamma^* + \frac{\gamma_1}{2}\right)\rho_{eg}$$

$$\gamma_1 = \gamma_{eg} + \gamma_{ge}$$

Also in Liouville Gleichung kann Dekohärenz und Relaxation berücksichtigt werden $\to$ Beschreibung von Dissipation in QM.