VI Relativistische Quantenmechanik

vgl. Schwabl, Band 2

6.1 Klein-Gordon-Gleichung

$p \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$ $\Rightarrow$ für freie Teilchen

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

Wellengl. $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,t)$

Relativitätstheorie:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^{\,2}}$$

$v \ll c$: $\quad mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \dots$

$m = 0$: $\quad c\,|\vec{p}|$

Lorentz-Trafo (statt Galilei) mischt Ort und Zeit.

Def. $\quad x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ 4er Vektor

$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$

$\mu, \nu, \dots \in \{0, 1, 2, 3\}$

$i, j, k, \dots \in \{1, 2, 3\}$

Summenkonvention: über wiederholte Indize wird summiert

x^μ kontravarianter 4er Vektor

$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu$ kovariant

$g_{\mu\nu}$ metrischer Tensor $\quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

4er Impuls $\quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$

$$p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = p^{0\,2} - \vec{p}^{\,2} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

Lorentz-Trafo zwischen I und I', die sich mit Geschwind. v zueinander bewegen

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

lineare Trafo, Matrix

mischt Ort und Zeit

---

relativistische Wellengl.

so etwas ?: $~~i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r,t) = \sqrt{m^2c^4 - c^2\hbar^2\vec{\nabla}^2}\,\psi(r,t)~~$

besser:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r},t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right) \psi(\vec{r},t)$$

Klein-Gordon-Gleichung

Schreibweise: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(x) = 0$$

$$\left(\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi(x) = 0$$

d'Alambert-Operator $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$

Dieser Operator ist invariant unter Lorentz-Trafo

(nach Konstruktion der Lorentz-Trafo)

Längenskala: $\frac{\hbar}{mc}$ = Compton-Wellenlänge

Oft verwenden wir Einheiten, wo $\hbar = 1$, $c = 1$

$\hbar = 1 \Rightarrow E = \omega$, $[E] = [\text{Zeit}^{-1}]$

$c = 1$

(auch oft: $k_B = 1 \Rightarrow E = T$)

dann wird's noch toller:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \psi(x) = 0$$

nicht zu verwechseln mit den Arbeiten, wo dann

$$\hbar = c = k_B = 1 = -1 = 2 = \pi = 42$$

Die Klein-Gordon-Gleichung gilt <u>nicht</u> für Teilchen mit Spin.

Sie gilt jedoch für spinlose relativistische Teilchen

z.B. π-Meson, Higgs-Teilchen, ...

Kontinuitätsgleichung

$$0 = \psi^* \left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right) \psi - \psi \left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right) \psi^*$$

$$= \psi^* (\partial_\mu \partial^\mu) \psi - \psi (\partial_\mu \partial^\mu) \psi^*$$

$$= \partial_\mu \left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*\right)$$

$$+ \vec{\nabla} \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*\right)$$

sieht aus wie

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

mit $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right]$ ✓ ok

aber

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right) \neq |\psi|^2$$

ρ ist nicht pos. definit,

also nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretierbar.

Zur Kl.-Gord.-Gl: DGL mit 2. Ordnung Zeitableitung $\Rightarrow$ man braucht 2 Anfangsbed.

Aber $\underbrace{q}_{\text{Ladung}}\rho$ = Ladungsdichte ist ok.

Die Gleichung enthält auch Antiteilchen
$\Rightarrow$ diese haben "negative Aufenthaltswahrscheinlichkeit"

$\Rightarrow$ Beide VZ bei ρ sind ok.

Freie Lösung der Klein-Gordon-Gl.

$$\psi(x) = \psi(\vec{x},t) = \exp\left(i\left(Et - \vec{p}\vec{x}\right)/\hbar\right)$$

mit $E^2 - c^2p^2 = m^2c^4$

$$E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$$

pos. und neg. Energielösungen $\longleftrightarrow$ Teilchen und Antiteilchen

(hier kann man Wasserstoffähnliche Atome diskutieren, z. B. π^+ und π^- Mesonen)

6.2 Dirac-Gleichung

Bedingungen

(1) relativist. $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$

(2) es ex. ein Viererstrom mit $j^0 \propto \rho$
mit ρ ist positiv definite WahrS-Dichte

(3) Die Gleichung muss "Lorentz-kovariant" sein d.h. invariant unter Lorentz-Trafo

Versuch: komme mit 1. Ordnung der Zeit und Ortsableitung aus
(es muss entweder beide 1. Ord. oder beide 2. Ordnung Ableitung sein, da LT Ort und Zeit mischt)

Das alles geht, da Dirac sagt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta m c^2 \right) \psi = H \psi$$

mit $N \times N$ Matrizen α^k, β und ψ ist N-komp. Spinor

$N = ?$, $\alpha^k = ?$, $\beta = ?$ klappt das?

(1) $$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -\hbar^2 c^2 \sum_{ij} \frac{1}{2} (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) \partial_i \partial_j \psi)$$

symmetrisiert, da $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$

2) Anwendung von H

$$+ \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=1}^{3} (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \partial_i \psi + \beta^2 m^2 c^4 \psi$$

Erfüllt $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$

wenn $\beta^2 = \mathbb{1}$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0$$

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

$$\alpha^{i2} = \mathbb{1} \qquad (i = j)$$

Es muss gelten α^i und β sind hermitesch (Bew. später)

In 2 Raumdimensionen gilt:

$$\alpha^1 = \sigma_x \qquad \sigma_x^2 = \mathbb{1} = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$$

$$\alpha^2 = \sigma_y \qquad \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$$

$$\beta = \sigma_z \qquad \sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x$$

Aber für 3 D Raum fehlt die 4te Pauli-Matrix

$N > 2$

Weitersuchen ...

weitere Eigenschaften der α^i und β

$$\alpha^i = -\beta \alpha^i \beta$$

$N = 3$ geht nicht!

$$\text{Spur}(\alpha^i) = -\text{Spur}(\beta \alpha^i \beta) = -\text{Spur}(\alpha^i \beta^2) = -\text{Spur}(\alpha^i)$$

zykl. tauschen

$\Rightarrow (\alpha^i)^2 = \mathbb{1} \quad \Rightarrow$ Eigenwerte sind nur ± 1

minimal $N = 4$

Standard-Darstellung:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$\sigma^1 = \sigma_x$, $\sigma^2 = \sigma_y$; $\sigma^3 = \sigma_z$

Übung: α^i und β erfüllen die Bedingungen

Es gibt auch andere Darstellungen : jede gedrehte Variante geht auch

---

Kontinuitätsgl.

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_N^*)$$

$$i\hbar\, \psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \psi^+ \alpha^i \partial_i \psi + m c^2 \psi^+ \beta \psi$$

$$-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^+\right) \psi = -\frac{\hbar c}{i} (\partial_i \psi^+) \alpha^{i+} \psi + m c^2 \psi^+ \beta^+ \psi$$

Differenz

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+ \psi) = -c\left[(\partial_i \psi^+)\alpha^{i+}\psi + \psi^+ \alpha^i \partial_i \psi\right] + \frac{i m c^2}{\hbar} \psi^+ \underbrace{(\beta - \beta^+)}_{=0} \psi$$

für $\beta = \beta^+$, $\alpha^{i+} = \alpha^i$ Kontinuitätsgleichung

mit $\rho = \psi^+ \psi$ und $j^i = c\, \psi^+ \alpha^i \psi$