$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\alpha^k \partial_k + \beta mc^2\right)\psi$ <u>Notation:</u> $x^\mu = (ct, \vec{x})$, $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$

$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} p^\mu &= i\hbar\partial^\mu = \left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)\\ p_\mu &= i\hbar\partial_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)\end{aligned}}$$

Kopplung an elektromagnet. Feld

- minimale Ergänzung $\vec{p} \to \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ also $p^k \to p^k - \frac{e}{c}A^k$, $A^1 = A_x, \dots$

<u>Dirac-Gleichung:</u> $p_k \to p_k - \frac{e}{c}A_k$, $A_1 = -A_x, \dots$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-c\alpha^k\left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right) + \beta mc^2 + e\phi\right)\psi$$

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi - c\alpha^k\left(i\hbar\partial_k - \frac{e}{c}A_k\right) + \beta mc^2\right)\psi = 0$$

$$\left(-\beta\left(i\hbar\partial_0 - \frac{e}{c}\phi\right) - \beta\alpha^k\left(i\hbar\partial_k - \frac{e}{c}A_k\right) + \beta^2 mc\right)\psi = 0$$

$\beta^2 = \mathbb{1}$, $\beta = \gamma^0$, $\beta\alpha^k = \gamma^k$

Def: $A_\mu = (\phi, A_k)$

$$\boxed{\left(-\gamma^\mu\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) + mc\right)\psi = 0}$$

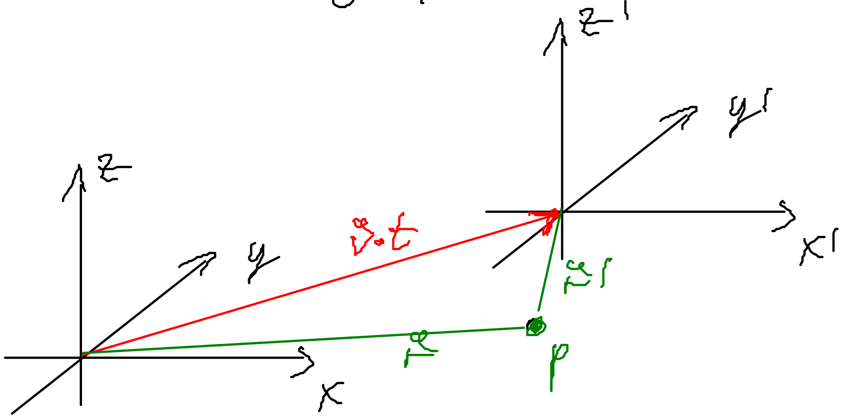
- Dirac-Gleichung ist invariant unter Eichtransformation

$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)$, $\psi(x) \to e^{-i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)}\phi(x)$

6.4 Lorentz-Transformation

Galilei-Transformation:

2 Beobachter in Inertialsystemen I und I' die sich mit v relativ zueinander bewegen, beobachten das selbe Ereignis am Ort $\vec{r}, t$



bei $t = 0$ ist $I = I'$

$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}\cdot t$, $t' = t$

Geschwindigkeiten addieren sich.

Lorentz-Transformation: (lineare Transformation)

Spezielle Relativitätstheorie: Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen dieselbe.

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\nu}}$$ ($a^{\mu} \neq 0$, inhomogene Trafo $\hat{=}$ Nullpunkt verschoben)

1. Bedingung: Wellenlänge für Licht muss invariant unter Lorentztrafo sein. Also d'Alembert-Op. ist invariant.

$$\boxed{\Box = \nabla^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_{\mu}\partial^{\mu} = g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}}$$

Transformation: $$\boxed{\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} = \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\partial'_{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \partial_{\mu} g^{\mu\nu}\partial_{\nu} = \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\partial'_{\lambda} g^{\mu\nu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}\partial'_{\rho} \overset{!}{=} \partial'_{\lambda} g^{\lambda\rho}\partial'_{\rho}$$

erfordert, dass $$\boxed{\Lambda^{\lambda}{}_{\mu} g^{\mu\nu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} = g^{\lambda\rho}}$$

- kürzer: $\Lambda g \Lambda^T = g$
- $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu}$ (Übungsaufgabe)
- $\det \Lambda g \Lambda^{-1} = \det g = \det\Lambda \cdot \det g \cdot \det \Lambda^T$

$\Rightarrow (\det\Lambda)^2 = 1$ also $\det\Lambda = \pm 1$

- $\lambda = \rho = 0$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^{3}(\Lambda^0{}_k)^2 = 1 \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \text{ also } \Lambda^0{}_0 \begin{cases} \geq 1 \\ \leq -1 \end{cases}$$

2. Bedingung: für $v \ll c$ soll sich LT auf GT reduzieren

Beispiele

① Boost = relative Bewegung in x-Richtung mit Geschwindigkeit v

Def: $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $a^{\mu} = 0$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

für $v \ll c$

$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \approx t$

$x' = \gamma(x - vt) \approx x - vt$

$y' = y$

$z' = z$

- reduziert sich auf GT für $v \ll c$
- erfüllt $\Lambda g \Lambda^T = g$ (Übungsaufgabe)
- $\det\Lambda = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$
- $\Lambda^0{}_0 = \gamma \geq 1$

äquivalente Schreibweise

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\cosh\eta = \gamma$, $\tanh\eta = \beta$

η = Rapidität

Allgemeiner Boost

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \quad \vec{v}^T = (v^1, v^2, v^3)$$

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \frac{\vec{v}^T}{c} \\ \hline -\gamma \frac{\vec{v}}{c} & 1\!\!1 + (\gamma-1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{v^2} \end{array}\right) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

② Drehungen z.B. um z-Achse um Winkel ϑ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\Lambda = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$$

③ Raumspiegelungen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$$

④ Zeitspiegelung

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

⑤ Raum-Zeit-Spiegelung

$$P \cdot T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \det\Lambda = 1, \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

Gruppe der homogenen Lorentz-Trafo

Poincaré-Gruppe ist {inhomogene Lorentztransformation}

- orthochrone LT enthalten keine Zeitspiegel
- LT lassen Skalarprodukt im "Minkowski-Raum" invariant

$$\boxed{x^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu}$$ (Übungsaufgabe)

Analog: $\boxed{x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu}$

6.5 Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung

Wie transformiert sich $\psi \to \psi'$? und $S(\Lambda) = ?$

$$\boxed{x' = \Lambda \cdot x + a, \quad \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)}$$ lineare Transformation ($\hbar = c = 1$)

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}(x'-a))$$

es gilt: $(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0$

$(-i\gamma^\mu\partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0$ $\quad\gamma^\mu$ wird nicht transformiert

Also $(-i\gamma^\mu\underbrace{\Lambda^\nu{}_\mu\partial'_\nu}_{\partial_\mu} + m)S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$ (auch $S(\Lambda)$ von links)

$$\Rightarrow -i S \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}\partial'_\nu\psi'(x') + m\psi'(x') = 0$$

und $(-i\gamma^\nu\partial'_\nu + m)\psi'(x') = 0$

$$\Rightarrow \quad S \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1} = \gamma^\nu$$

$$\boxed{S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu}$$

Infinitesimale Lorentztrafo (Drehungen und Boosts)

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\nu = \underbrace{g^\mu{}_\nu}_{\delta_{\mu\nu}} + \Delta\omega^\mu{}_\nu}$$

$\Delta\omega = 4\times 4$ Matrix, 16 Parameter

Einsetzen in $\boxed{\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\lambda\rho}}$

$$= (g^\lambda{}_\mu + \Delta\omega^\lambda{}_\mu) g^{\mu\nu} (g^\rho{}_\nu + \Delta\omega^\rho{}_\nu)$$

$$= g^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} g^\rho{}_\nu + \Delta\omega^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} g^\rho{}_\nu + g^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu}\Delta\omega^\rho{}_\nu + \underbrace{\cancel{(\Delta\omega)^2}}_{}$$

vernachlässigt

$$= g^{\lambda\rho} + \Delta\omega^{\lambda\rho} + \Delta\omega^{\rho\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\omega^{\lambda\rho} = -\Delta\omega^{\rho\lambda}}$$ nur noch 6 Parameter

- 3 Raumdrehungen (3 Drehachsen, 3 Winkel)

  z.B. Drehung um z-Achse: $\Delta\omega^1{}_2 = \Delta\varphi = -\Delta\omega^{12}$

- 3 Boosts (3 Richtungen)

  $\Delta\omega^0{}_1 = -\Delta\omega^{01} = -\Delta\beta$; $\Delta v = c\cdot\Delta\beta$