6.9 Foldy-Wouthuysen Transf.

$$\psi = e^{-iS}\psi' \longrightarrow H' = e^{iS} H e^{-iS} - e^{iS}(i\partial_t e^{-iS})$$

freie Teilchen $H = \vec\alpha\vec p + \beta m \qquad c = \hbar = 1$

$$e^{\pm iS} = e^{\pm\beta \frac{\vec\alpha\vec p}{|\vec p|}\vartheta} \quad \text{mit} \quad \tan(2\vartheta) = \frac{|\vec p|}{m}$$

$$\Rightarrow H' = \beta\sqrt{m^2+p^2} \qquad iS \approx \beta\frac{\vec\alpha\vec p}{2m}$$

Teilchen im elektromagn. Potential

$$H = \underbrace{\vec\alpha(\vec p - e\vec A(\vec r,t))}_{=\mathcal{O}\ (\hat= \text{odd})} + \underbrace{\beta m}_{\text{führend}} + \underbrace{e\phi(\vec r)}_{=\mathcal{E}\ (\hat= \text{even})}$$

Ansatz $iS = \frac{\beta\mathcal{O}}{2m}$

Ergebnis: $H' = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] + \dots$

$\mathcal{O}' = \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] + \dots$ immer noch ungerade aber kleiner $\frac{1}{m}$

- nächste Trafo $iS' = \frac{\beta\mathcal{O}'}{2m}$ $\Rightarrow H'' = \dots$ immer noch $\mathcal{O}'' \neq 0$
- weitere Trafo $iS'' = \frac{\beta\mathcal{O}''}{2m}$ $\Rightarrow H''' = \dots$ enthält in gewünschter Genauigkeit (in Entwicklung in $\frac{1}{m}$) keine ungeraden Terme mehr.

$\Rightarrow$ Jetzt können wir uns auf Teilchensektor beschränken

$\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}$ } 2er Spinor { Teilchen / Antiteilchen

H''' im Teilchensektor H_{eff}

$$H_{eff} = mc^2 + e\phi(\vec r) + \frac{1}{2m}(\vec p - e\vec A)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec\sigma\vec B - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{4m^2c^2}\vec\sigma\cdot\vec E\times(\vec p - e\vec A)$$
$$- \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\mathrm{div}(\vec E) = H_0 + H_1 + H_2 + H_3$$

- Pauli-Hamilton
- Relativistische Korrektur von Entwicklung $E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}$
- Spin-Bahn Kopplung, Betrachte Sonderfall $\vec A = 0$, $\vec E = -\nabla\phi$

a) für zentralsymm. Potential $\to \vec E = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec r$

$$H_2 = \frac{e}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec\sigma\cdot\underbrace{\vec r\times\vec p}_{\vec L} \propto \vec S\cdot\vec L$$

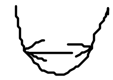
b) Für $\vec E = E\hat e_z$ z.B. in Heterostruktur mit Grenzschicht 2-dim Elektronengas: $H_2 = a\,\vec\sigma\cdot(\vec e_z\times\vec p) = a\,\vec\sigma\begin{pmatrix}-p_y\\p_x\\0\end{pmatrix} = a(\sigma_y p_x - \sigma_x p_y)$

Rashba-Spin-Bahn Kopplung

⇒ Spinmanipulationen sind möglich → Spinelektronik

• $H_3 = -\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\,\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V$ $V = e\phi$

$= \frac{\lambda_c^2}{8}\nabla^2 V$

z.B. V  ⇒ $\nabla^2 V > 0$

Comptonwellenlänge $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$

Zitterbewegung um $\Delta x^2 \sim \lambda_c^2$ führt zu Energieerhöhung

Darwinterm

VII Addition von Drehimpulsen

7.1 Clebsch-Gordan-Koeff.

Wiederholung QM I

Für Drehimpulse gelten Vertauschungsrelationen:

$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ und zykl.

⇒ **Eigenwertproblem**

$J^2 |k j m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|k j m\rangle$ j = ganz oder halbzahlig ≥ 0

$J_z |k j m\rangle = \hbar m\,|k j m\rangle$ $-j \leq m \leq j$

• Alle Matrixelemente von $\vec{J}$ oder $F(\vec{J})$ sind unabh. von k   k: für weitere mit $\vec{J}^2$ und J_z vertauschende Observablen

• Es gilt für $J_\pm = J_x \pm i J_y$

$J_\pm |k j m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|k j\, m\pm 1\rangle$

$J_+ |k j j\rangle = 0 = J_- |k j\, -j\rangle$

• Für gegebenes k und j ist der Hilbertraum $\mathcal{H}(k,j)$ $(2j+1)$-dim

Betrachte System mit 2 Drehimpulsen $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$

und Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ (z.B. 2 Spin → Triplet, Singulett oder Bahn + Spin)

⇒ $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ und zykl. ($J_z = J_{1z} + J_{2z}$)

$[\vec{J}^2, J_z] = 0$ Außerdem $[J_z, \vec{J}_1^2] = 0 = [J_z, \vec{J}_2^2]$

$[\vec{J}^2, \vec{J}_1^2] = 0 = [\vec{J}^2, \vec{J}_2^2]$

Aber $[J_{1z}, \vec{J}^2] \neq 0 \neq [J_{2z}, \vec{J}^2]$

• Satz von vertauschenden Observablen haben gemeinsame Basis

$|J M j_1 j_2\rangle$ und $\vec{J}^2 |\ldots\rangle = \hbar^2 J(J+1)|\ldots\rangle$ und $\vec{J}_1^2 |\ldots\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1)|\ldots\rangle$

• Die Zustände $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ bilden eine Basis im $(2j_1+1)(2j_2+1)$-dim Hilbertraum ($|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$)

$$\boxed{|J M j_1 j_2\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 j_2, m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2, m_1 m_2 | J M j_1 j_2\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeff}}}$$

Mögliche Eigenwerte von $\vec{J}^2$ und J_z

Beispiel 2-Spin $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $J=1$ oder $J=0$

Bahn + Spin $\Rightarrow$ $J = l \pm \frac{1}{2}$

$J_z = J_{1z} + J_{2z}$ $\quad$ J_z hat Eigenwert $m_1 + m_2 = M$

• der Wert $M = j_1 + j_2$ ist möglich

• $J = j_1 + j_2$ ist möglich

Bew: weitere Werte von J sind $j_1+j_2-1, \dots j_1-j_2$ für $j_1 > j_2$

Bew: $J = j_1 + j_2 \rightarrow M = j_1+j_2, j_1+j_2-1, \dots -j_1-j_2$

$2(j_1+j_2)+1$ verschiedene Zustände

$J = j_1 + j_2 - 1 \rightarrow 2(j_1+j_2-1)+1$ verschiedene M-Zustände

$\vdots$

$J = j_1 - j_2 \longrightarrow 2(j_1-j_2)+1$ versch. M-Zustände

$\Rightarrow$ Gesamtzahl $\boxed{\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2J+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)}$

$$NR = \sum_{i=0}^{2j_2} [2(j_1-j_2+i)+1] = (2j_2+1)[2(j_1-j_2)+1] + 2\,\frac{2j_2(2j_2+1)}{2}$$

Konstruktion der Zustände $|J M, j_1 j_2\rangle = |J M\rangle$

• Der Zustand $|J = j_1+j_2, M = J\rangle = |j_1 j_2; j_1 j_2\rangle$ gibt es nur einmal

nächsten Z. erhält man durch anwenden von $J_- = J_{1-} + J_{2-}$

• Der Zustand $|J, M = J-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2J}} J_- |J, J\rangle$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2J}} (J_{1-} + J_{2-}) |j_1 j_2; j_1, j_2\rangle$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2J}} \Big(\hbar\sqrt{j_1(j_1+1) - j_1(j_1-1)}\, |j_1 j_2; j_1-1, j_2\rangle + \hbar\sqrt{j_2(j_2+1) - j_2(j_2-1)}\, |j_1 j_2; j_1, j_2-1\rangle\Big)$$

$$= \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\, |j_1 j_2; j_1-1, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\, |j_1 j_2; j_1, j_2-1\rangle$$

nächster Zustand durch

$J_- |J, J-1\rangle = |J, J-2\rangle$

• $|J, J-2\rangle = \dots J_- |J, J-1\rangle$

$= \dots (J_{1-} + J_{2-})(\ )$

• so hangelt man sich runter bis $M=-J$
Unterraum mit $J = j_1 + j_2 - 1$