Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ **Basis**: $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$

$|J, M; j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} C_{m_1 m_2}^{JM} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = |J M\rangle$

$J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots |j_1 - j_2|$

$M = -J, -J+1, \dots, J$

$J_- = J_x - i J_y = J_{1-} + J_{2-}$

$J_- |J M\rangle = \hbar \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} |J, M-1\rangle$

Unterraum $J = j_1 + j_2$

$|J = j_1 + j_2, M = J\rangle = |j_1, j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle$

$|J = j_1 + j_2, M = J-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} |j_1, j_2; j_1 - 1, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} |j_1, j_2; j_1, j_2 - 1\rangle$

mehrfaches Anwenden von J_- bis

$|J = j_1 + j_2, M = J-2\rangle = \dots$

$\Downarrow J_-$

$|J = j_1 + j_2; M = -J\rangle = |j_1, j_2; -j_1, -j_2\rangle$

Unterraum $J = j_1 + j_2 - 1$

Zustand mit maximalem $M = j_1 + j_2 - 1$ ist Linearkombination:

$|J = j_1 + j_2, M = J\rangle = \alpha |j_1, j_2; j_1, j_2 - 1\rangle + \beta |j_1, j_2; j_1 - 1, j_2\rangle$

- normiert $\rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
- orthogonal zu $|J = j_1 + j_2, M = J-1\rangle$

$\Rightarrow \alpha \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} + \beta \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} = 0$

- Wähle α und β reell, $\alpha > 0$

$\Rightarrow |J = j_1 + j_2 - 1, M = J\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} |j_1, j_2; j_1, j_2 - 1\rangle - \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} |j_1, j_2; j_1 - 1, j_2\rangle$

$J_- = J_{1-} + J_{2-}$ anwenden

$\Rightarrow |J = j_1 + j_2 - 1; M = J-1\rangle = \dots$

Unterraum $J = j_1 + j_2 - 2$

$|J = j_1 + j_2 - 2, M = J\rangle = \alpha |j_1, j_2; j_1, j_2 - 2\rangle + \beta |j_1, j_2; j_1 - 1, j_2 - 1\rangle + \gamma |j_1, j_2; j_1 - 2, j_2\rangle$

$\Rightarrow$ Normierung α, β, γ

7.2 Wigner-Eckart-Theorem und g-Faktor

- Vektoroperatoren $\vec{V}$ haben Vertauschungsrelation mit Gesamtdrehimpuls
- Basis $|k,j,m\rangle$: $\vec{J}^2|k,j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|k,j,m\rangle$, $J_z|k,j,m\rangle = \dots$
  k steht für weitere mit $\vec{J}^2$ und J_z vertauschende Observablen
- $[J_x, V_x] = 0$, $[J_x, V_y] = i\hbar V_z$ und zykl. $[J_i, V_j] = i\hbar V_z \delta_{ij}$
  daraus folgt (siehe C.T. § 10.7)

$$\boxed{\langle k\, j\, m|\vec{V}|k\, j\, m'\rangle = \alpha(k,j)\langle k\, j\, m|\vec{J}|k\, j\, m'\rangle}$$ **W-E-Theorem**

$\alpha(k,j)$ hängt nicht von m und m' ab
und hängt nicht von der Vektorkomponente ab

Ausdruck für $\alpha(k,j)$

Wir arbeiten im Unterraum $\mathcal{H}(k,j)$

Def: Projektionsoperator auf Unterraum $\mathcal{H}$: $P(k,j)$ mit $P^2 = P$

- W-E-Theorem: $\boxed{P(k,j)\,\vec{V}\,P(k,j) = \alpha(k,j)\,P(k,j)\,\vec{J}\,P(k,j)}$
- es gilt $[\vec{J}, P(k,j)] = 0$ (Nachrechnen durch Anwenden auf Zustand)
- $P(k,j)\,\vec{J}\cdot\vec{V} = \vec{J}\cdot P(k,j)\vec{V}P(k,j) \overset{\text{W-E-Th.}}{=} \alpha(k,j)\,\vec{J}P\vec{J}P = \alpha\,\vec{J}^2 P(k,j) = \alpha\hbar^2 j(j+1)P$

$\Rightarrow \langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_{kj} = \alpha(k,j)\,\hbar^2 j(j+1)$

Erwartungswert in $\mathcal{H}(k,j)$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(k,j) = \frac{\langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_{kj}}{\hbar^2 j(j+1)} = \frac{\langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_{kj}}{\langle \vec{J}^2\rangle_{kj}}}$$

- Im Unterraum $\mathcal{H}(k,j)$ gilt: $\boxed{\vec{V} = \frac{\langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_{kj}}{\langle \vec{J}^2\rangle_{kj}}\cdot\vec{J}}$ **Projektionstheorem**

g=Landé-Faktor

Zentralsym. Potential $[H_0, \vec{J}^2] = [H_0, J_z] = 0 = [H_0, \vec{L}^2] = [H_0, \vec{S}^2] = [\vec{J}^2, J_z]$

$\Rightarrow$ gemeinsamer Satz von Eigenzuständen $|\underbrace{E_0, L, S}_{k}, J, M\rangle$

$H_0|\dots\rangle = E_0|\dots\rangle$

- füge Magnetfeld in z-Richtung hinzu $\boxed{H_1 = \omega_L(L_z + 2S_z)}$

$\boxed{\omega_L = -\frac{q}{2m}B}$

Behauptung $H_1 = g_J\,\omega_L J_z$

$\Rightarrow$ Aufspaltung in äquidistante Niveaus $\Delta E = g\hbar\omega_L M$

$M = -J, \dots, +J$

Beweis Im Unterraum $\mathcal{H}(E_0,L,S;J)$ gilt

$$\hat{\vec{L}} = \frac{\langle \hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{J}}\rangle_{E_0,L,S}}{\hbar^2 J(J+1)}\,\hat{\vec{J}} \quad \text{und} \quad \hat{\vec{S}} = \frac{\langle \hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{J}}\rangle_{E_0,L,S}}{\hbar^2 J(J+1)}\,\hat{\vec{J}}$$

und
$$\langle \hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{J}}\rangle_{E_0,L,S} = \langle \hat{\vec{L}}\cdot(\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}})\rangle = \langle \hat{\vec{L}}^2 + \tfrac{1}{2}(\hat{\vec{J}}^2-\hat{\vec{L}}^2-\hat{\vec{S}}^2)\rangle$$
$$= \hbar^2\Big(L(L+1)+\tfrac{1}{2}\big(J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)\big)\Big)$$

analog $\langle \hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{J}}\rangle_{E_0,L,S} = \hbar^2\Big(S(S+1)+\tfrac{1}{2}\big(J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)\big)\Big)$

- im Unterraum $\mathcal{H}(E_0,L,S,J)$

$$H_1 = \omega_L(L_z+2S_z) = \omega_L\frac{J_z}{\hbar^2 J(J+1)}\hbar^2\Big(L(L+1)+2S(S+1)+\big(\tfrac{1}{2}+1\big)(\dots)\Big)$$
$$= \omega_L J_z\left(\frac{3}{2}+\frac{S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}\right) \quad \text{also} \quad \boxed{g_J = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{S(S+1)-L(L+1)}{J(J+1)}}$$

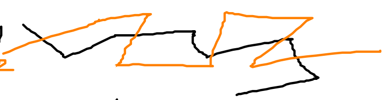
Grenzfälle $S=0:\quad g=1$

$L=0:\quad J=S \Rightarrow g=2$

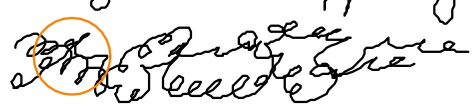
Kap VIII Bosonen und Fermionen

Ununterscheidbare Teilchen

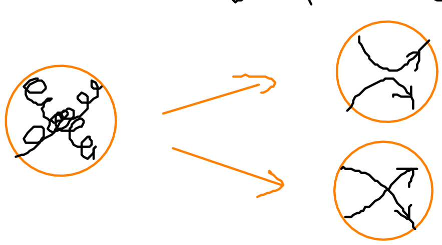
- klassisch: Teilchen können im Prinzip immer unterschieden werden (können nummeriert werden) 1 2



- QM: Identische Teilchen: Wellenfkt überlappt irgendwo $\Rightarrow$ ununterscheidbar 1 2



Überlapp



2 Möglichkeiten

Betrachte QM 2 Teilchen, die gedanklich nummeriert sind (1) und (2) in QM Zuständen n_1, n_2:

Ortsraum

- Zustand $|n_1^{(1)}\rangle|n_2^{(2)}\rangle = |1:n_1;\, 2:n_2\rangle \hat{=} \psi_{n_1}(r^{(1)})\,\psi_{n_2}(r^{(2)})$

ununterscheidbar von $|n_2^{(1)}\rangle|n_1^{(2)}\rangle = |1:n_2;\, 2:n_1\rangle \hat{=} \psi_{n_2}(r^{(1)})\,\psi_{n_1}(r^{(2)})$

Permutationsoperator $P_{12}|1:n_1;\, 2:n_2\rangle = |2:n_1;\, 1:n_2\rangle$

$P_{12}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ EW von P_{12} sind ± 1

Hamilton-Operator ununterscheidbarer Teilchen

- z.B. $H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Rightarrow [H, P_{12}] = 0$
- gemeinsame Basis von H und P_{12}: weder $|1:n_1; 2:n_2\rangle$ noch $|2:n_1; 1:n_2\rangle$

  sind EF von P_{12}
- Sowohl $|\psi_{\substack{S\\A}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:n_1; 2:n_2\rangle \pm |2:n_1; 1:n_2\rangle\right)$

  mit $P_{12}|\psi_{\substack{S\\A}}\rangle = \pm|\psi_{\substack{S\\A}}\rangle$
- Beide Vorzeichen sind möglich

  \+ Bosonen (Photonen, ^4He-Kern

  − Fermion (Elektron, Proton, Neutron, ...)