VII Bosonen und Fermionen

7.1 Ununterscheidbare Teilchen

2 Teilchen $\psi_{n_1}(\vec r_1)\,\psi_{n_2}(\vec r_2) \leftarrow |1:n_1;\,2:n_2\rangle$

- Permutationsop. $P\,|1:n_1;\,2:n_2\rangle = |2:n_1;\,1:n_2\rangle$

  $P^2 = 1 \Rightarrow EW \pm 1$

  $[P,H]=0 \Rightarrow$ suche gemeinsame Eigenf'kt.

- Es seien $|1:n_1,\,2:n_2\rangle$ und $|2:n_1;\,1:n_2\rangle$ Eigenzustände von H

  $\Rightarrow$ gem. Eigenzustände (S: Bosonen, A: Fermionen)

  $$|\psi_{S/A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:n_1;\,2:n_2\rangle \pm |2:n_1;\,1:n_2\rangle\right)$$

  $H\,|\psi_{S/A}\rangle = E_{S/A}\,|\psi_{S/A}\rangle \qquad P\,|\psi_{S/A}\rangle = \pm\,|\psi_{S/A}\rangle$

Beobachtungen

- es gibt beides, Bosonen und Fermionen
- Bosonen haben Spin $0,1,2,\dots$

  Fermionen haben Spin $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots$

Viele Teilchen

- Bosonen: Basis

  $$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\Big(|1:n_1,\,2:n_2,\,\dots\,N:n_N\rangle + |2:n_1;\,1:n_2;\,\dots\rangle + |3:n_1,\,2:n_2,\,1:n_3;\,\dots\rangle\,\dots\Big)$$

  $$\boxed{|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P P\,|1:n_1;\,2:n_2;\,\dots\,N:n_N\rangle}$$

Achtung: noch nicht Normiert

- Fermionen

  $$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P (-1)^p\,P\,|1:n_1;\,2:n_2;\dots\,N:n_N\rangle$$

  Zahl der permutierten Paare

  alle P. Permutationen

$$\boxed{|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} |1:n_1\rangle & |1:n_2\rangle & \dots & |1:n_N\rangle \\ |2:n_1\rangle & |2:n_2\rangle & & |2:n_N\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ |N:n_1\rangle & & & |N:n_N\rangle \end{vmatrix}}$$

Determinante

Slater Determinante

ist EZ von P mit

EW: -1.

- Die einzige Information die wir haben ist wie häufig jede Quantenzahl n_j vorkommt.
- Bei Bosonen können die selben Quantenzahlen mehrfach vorkommen. z.B können alle N Teilchen im Grundzustand sein

Beispiel nicht WW **Bosonen** $\boxed{H = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha}$ mit $h_\alpha \, |n\rangle_\alpha = E_n |n\rangle_\alpha$

Grundzustand $|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P P |0\rangle_1 |0\rangle_2 \dots |0\rangle_N$

$H |\Psi_S\rangle = N E_0 |\Psi_S\rangle$

$\Rightarrow$ Bosekondensation (Nobel-Preis 2001 Cornell, Ketterle, Wiemann

Fermionen angenommen 2 Teilchen wären im selben Zustand

$\Rightarrow |\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1:n\,;\, 2n\rangle - |2:n\,;\, 1:n\rangle) = 0$

$\Rightarrow$ Pauli Prinzip (keine Teilchen im selben Zustand)

- Bei Bosonen kann jeder Zustand $|n_j\rangle$ entweder 0, 1, 2, … fach „besetzt sein"
- Bei Fermionen kann jeder Zustand maximal einfach besetzt sein

7.2 2. Quantisierung (siehe Schwabl QM II)

Notation: Einteilchenzustände $|i\rangle$ $\quad i = 1, 2, \dots \infty$

N-Teilchen $\quad \alpha = 1, \dots N$

- nummerierte Teilchen $|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = |i_1\rangle_1 |i_2\rangle_2 \dots |i_N\rangle_N$
- ununterscheidbare Teilchen $\Rightarrow$ symm. oder antisymm. Zustände

$$\boxed{S_\pm |i_1, i_2, \dots i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (\pm)^P P |i_1, i_2, \dots i_N\rangle}$$

- Zustände sind vollständig charakterisiert durch die Angabe, wie häufig jeder Einteilchenzustand vorkommt.

$$\boxed{n_i = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{Bosonen} \\ 0, 1 & \text{Fermionen} \end{cases}}$$

Es gilt

$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N}$ Besetzungszahlendarstellung

$|n_1, n_2, \dots\rangle = c \quad S_\pm |i_1, i_2, \dots i_N\rangle$

Normierung:

- Wenn alle $n_i = 0$ oder 1 sind, dann ist $c = 1$, denn $\frac{1}{\sqrt{N!}}$ ist so gewählt
- Wenn aber manche $n_i > 1$ sind, dann sind $n_1! n_2! n_3! \ldots$ $(1! = 0! = 1)$ Zustände gleich

$$\Rightarrow |n_1, n_2, \ldots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \ldots}} S_\pm |i_1, i_2, \ldots i_N\rangle$$

Erzeuger und Vernichter für Bosonen

In Analogie zu Photonen oder Phononen definieren wir für Bose-Teilchen auch mit Masse Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

$$\boxed{\begin{aligned} a_i^+ |n_1, n_2, \ldots n_i \ldots\rangle &= \sqrt{n_i + 1} \, |n_1, n_2, \ldots n_i + 1, \ldots\rangle \\ a_i |n_1, \ldots n_i \ldots\rangle &= \sqrt{n_i} \, |n_1, \ldots n_i - 1, \ldots\rangle \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0 \qquad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$$

Teilchenzahloperator für die Zahl im Zustand $|i\rangle$: $\boxed{n_i = a_i^+ a_i}$

WW-freie Teilchen $H = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha$ mit $h_\alpha |i\rangle_\alpha = \varepsilon_i |i\rangle_\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{H = \sum_i \varepsilon_i n_i = \sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i} \qquad \boxed{N = \sum_i n_i = \sum_i a_i^+ a_i} \text{ Teilchenzahloperator}$$

Allgemeiner Ein-Teilchenoperator $T = \sum_\alpha t_\alpha$

ununterscheidbar

- t_α kann nicht diagonal sein $(t_\alpha)_{ij} = {}_\alpha\langle i | t_\alpha | j\rangle_\alpha = {}_\alpha\langle j | t_\alpha | i\rangle_\alpha^* \overset{\downarrow}{=} t_{ij}$

$$\Rightarrow \boxed{t_\alpha = \sum_{i,j} t_{ij} \, |i\rangle_\alpha {}_\alpha\langle j| \text{ und } T = \sum_{i,j} t_{ij} \sum_{\alpha=1}^{N} |i\rangle_\alpha {}_\alpha\langle j|}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha |i\rangle_\alpha {}_\alpha\langle j| n_1, n_2, \ldots n_i \ldots n_j \ldots\rangle \\ &= n_j \underbrace{\frac{\sqrt{n_i + 1}}{\sqrt{n_j}}}_{\text{Anpassung der Normierung}} |n_1 \ldots n_i + 1 \ldots n_j - 1 \ldots\rangle \\ &= \sqrt{n_j} \sqrt{n_i + 1} \, |n_1, \ldots n_i + 1, n_j - 1 \ldots\rangle \\ &= a_i^+ a_j | \ldots n_i, \ldots n_j \ldots\rangle \end{aligned}$$

Also $\boxed{\sum_\alpha |i\rangle_\alpha {}_\alpha\langle j| = a_i^+ a_j} \Rightarrow \boxed{T = \sum_{i,j} t_{ij} a_i^+ a_j}$

speziell für $t_{ij} = t_i \delta_{ij} \Rightarrow T = \sum_i t_i a_i^+ a_i$

Analog für Zwei-Teilchenoperatoren $H_1 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} V(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$ (Wechselwirkung)

$$\Rightarrow H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,m} \langle ij | V | km\rangle a_i^+ a_j^+ a_m a_k$$

Fermionen $S_- |i_1, \dots i_N\rangle =$ Slater Determinante

(Normiert da $n_i = 0, 1$) $= -S_- |i_2, i_1, \dots\rangle$

$= |n_1, n_2, \dots\rangle$

Erzeuger und Vernichter für Fermionen

Grundzustand

$S_- |i_1 \dots\rangle = c^+_{i_1} c^+_{i_2} \dots |0\rangle = -c^+_{i_2} c^+_{i_1} \dots |0\rangle$

Allgemein: $|\underline{n}_1, n_2 \dots\rangle = (c_1^+)^{n_1} (c_2^+)^{n_2} \dots |0\rangle$

irgend eine feste Reihenfolge der $|i\rangle$ $\Rightarrow (c_i)^2 = 0$

Vorzeichenwechsel $c_i^+ c_j^+ + c_j^+ c_i^+ = 0 = \underbrace{[c_i^+, c_j^+]_+ = \{c_i^+, c_j^+\}}_{\text{Antikommutator}}$

$\Rightarrow [c_i, c_j]_+ = 0$ und $[c_i, c_j^+]_+ = \delta_{ij}$

Ein-Teilchenoperator $T = \sum_{ij} t_{ij} c_i^+ c_j$

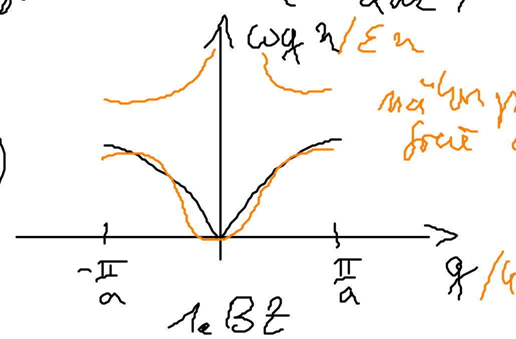
$\vdots$

Hamilton Operator eines Festkörpers

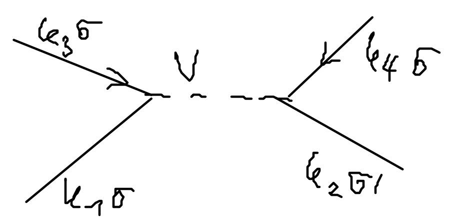
$\boxed{H = H_{el} + H_{ph} + H_{el-el} + H_{el-ph}}$ für freie Elektr. $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\vec{k}$ = Wellenvektor

$H_{el} = \sum_{\vec{k}\sigma = \pm 1} \varepsilon_k c^+_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma}$

$H_{ph} = \sum_{\vec{q}\lambda = L, T_1, T_2} \hbar \omega_{q\lambda} \left(a^+_{q\lambda} a_{q\lambda} + \frac{1}{2} \right)$



$H_{el-el} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1 k_2 k_3 k_4 \\ \sigma \sigma'}} V_{k_1 k_2 k_3 k_4} c^+_{k_1 \sigma} c^+_{k_2 \sigma'} c_{k_4 \sigma'} c_{k_3 \sigma}$



$H_{el-ph} = \sum g\, c^+_{k+q\sigma} c_{k\sigma} \left(a_{q\lambda} + a^+_{-q\lambda} \right)$